

EXERCICE 1

Restitution du cours.

Soit a, a', b et b' des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

On sait que : Si $a \equiv a'(n)$ et si $b \equiv b'(n)$, alors $ab \equiv a'b'(n)$.

Démontrer que :

$$\text{Si } a \equiv b(n) \text{ et si } p \text{ appartient à } \mathbb{N}^*, \text{ alors } a^p \equiv b^p(n).$$

EXERCICE 2

Division Euclidienne.

Les deux questions qui suivent sont indépendantes.

1. On divise 63 par un entier naturel b . Le reste est 17. Donner toutes les valeurs possibles du quotient q et du diviseur b .
2. n désigne un entier naturel non nul. On pose $a = n^2 + 5n + 7$ et $b = n + 3$.
Démontrez que pour tout entier naturel n non nul, le reste de la division euclidienne de a par b est indépendant de n .

EXERCICE 3

Langage des congruences.

Les deux questions qui suivent sont indépendantes.

1. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tels que $n + 5 \equiv 3 (9)$.
2. Quel est le reste dans la division euclidienne de 4^{2014} par 7 ?
3. Trouver $a \in \mathbb{Z}^-$, tel que $7 \equiv a (4)$. Démontrer que, pour tout entier naturel n , $7^{2n} + 3$ est divisible par 4.

EXERCICE 4

Propriétés de divisibilité.

On désigne par n et a deux entiers naturels supérieurs à 2.

1. Démontrer que si $a|3n + 1$ et $a|4n - 5$ alors $a|19$. Quelle est alors la valeur de a ?
2. Déterminer toutes les valeurs possibles de n inférieures à 100 tels que $a|3n + 1$ et $a|4n - 5$.