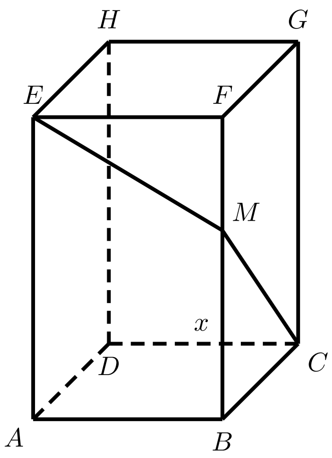
Dans le parallélépipède rectangle ci-dessous, on donne les longueurs : $AB = 4$, $BC = 3$ et $AE = 5$.
Le point $M$ se situe sur le segment $[BF]$ et on appelle $x$ la longueur $BM$.




Le but de l'exercice est d'étudier la longueur du trajet $L = EM + MC$ en fonction de la position de $M$.

1. Déterminer les valeurs exactes ou arrondies à $10^{-1}$ près de la longueur $L$ :

   (a) lorsque $M$ se situe en $B$ : $L = EM + MC = EB + BC \underset{Pyth.}{=} \sqrt{5^2+4^2} + 3 = 3 + \sqrt{41} \approx 9,4$ à 0,1 près ;

   (b) lorsque $M$ se situe en $F$ : $L = EM + MC = EF + FC \underset{Pyth.}{=} 4 + \sqrt{5^2+3^2} = 4 + \sqrt{34} \approx 9,8$ à 0,1 près ; ;

   (c) lorsque $M$ se situe au milieu de $[BF]$ : $L = EM + MC = EK + KC \underset{Pyth.}{=} \sqrt{2.5^2+4^2} + \sqrt{2.5^2+3^2} = \sqrt{22.25} + \sqrt{15.25} \approx 8,6$ à 0,1 près . ($K$ milieu de $[BF]$)

• ○ • ○ •

2. (a) Ensemble des valeurs possibles que peut prendre la variable $x$ : $M \in [BF]$ donc $0 \leqslant BM \leqslant BF \Leftrightarrow \boxed{0 \leqslant x \leqslant 5}$.

   (b) $BM = x$ et $MF = BF - BM = 5 - x$. En utilisant deux fois le théorème de Pythagore, on trouve :

$$L(x) = \sqrt{EF^2 + MF^2} + \sqrt{BM^2 + BC^2} = \sqrt{4^2 + (5-x)^2} + \sqrt{x^2+9} = \boxed{\sqrt{41 - 10x + x^2} + \sqrt{x^2+9}}$$

• ○ • ○ •

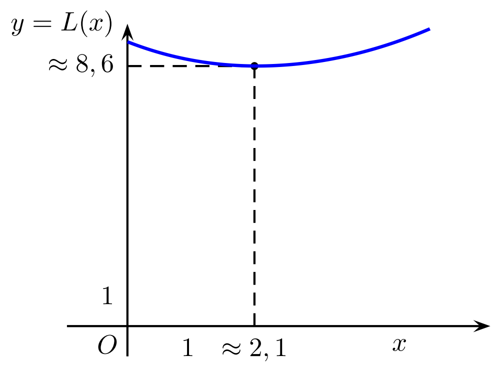
3.

| $x$ | $L(x)$ |
|---|---|
| 0 | 9.4031 |
| 1 | 8.8191 |
| 2 | 8.6056 |
| 3 | 8.7148 |
| 4 | 9.1231 |
| 5 | 9.8310 |

Le minimum est obtenu pour $x$ entre 1 et 3.

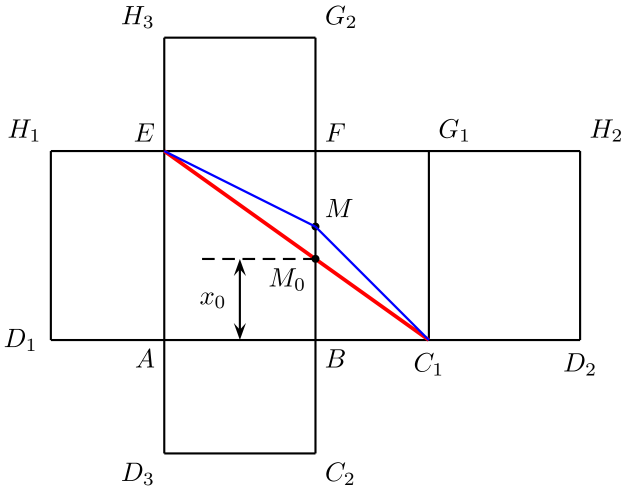
| $x$ | $L(x)$ |
|---|---|
| 1 | 8.8191 |
| 1.1 | 8.7819 |
| ... | ... |
| 2 | 8.6056 |
| 2.1 | 8.6026 |
| 2.2 | 8.6028 |
| ... | ... |
| 3 | 8.7148 |

Le minimum est obtenu pour $x$ entre 2 et 2,2.




• ○ • ○ •

4. Patron du parallélépipède :




À la position $M_0$ sur l'arête $[BF]$, qui permet d'obtenir le minimum de la fonction $L$, on attribue la valeur $x_0$. En d'autres termes $L(x_0)$ est le minimum de $L$ sur l'intervalle $[0;5]$.

L'utilisation du théorème de Thalès permet de préciser la valeur de $x_0$ :

$$\frac{M_0B}{AE} = \frac{C_1B}{C_1A} \Leftrightarrow \frac{x_0}{5} = \frac{3}{7} \Leftrightarrow \boxed{x_0 = \frac{15}{7}}$$

Le minimum de $L$ vaut exactement $L\left(\frac{15}{7}\right) = \boxed{\sqrt{74}}$

à 0,0001 près : $\boxed{\frac{15}{7} \approx 2,1429 \quad \text{et} \quad \sqrt{74} \approx 8,6023}$

Pour préciser un peu les choses, le tableau de variations de la fonction $L$ :

| $x$ | $0$ | $\frac{15}{7}$ | $5$ |
|---|---|---|---|
| Variations de $L$ | $3+\sqrt{41}$ ↘ | $\sqrt{74}$ | ↗ $4+\sqrt{34}$ |