EXERCICE 1 :

Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On tire trois fois de suite une boule avec remise. Le résultat des trois tirages successifs avec remise dans une urne contenant 10 boules numérotées est une liste (n_1, n_2, n_3) de trois entiers compris entre 1 et 10. L'univers est donc l'ensemble des triplets d'entiers entre 1 et 10 donc $\text{card}(\Omega) = 10^3$.

1. Soit A :« les trois nombres sont rangés dans l'ordre strictement croissant ». Il faut donc dénombrer les triplets (n_1, n_2, n_3) d'entiers distincts entre 1 et 10, avec $n_1 < n_2 < n_3$.

   On choisit 3 nombres distincts de $[\![1;10]\!]$, il y a $\binom{10}{3}$ choix posssibles et pour chaque combinaison, il existe un seul triplet rangé dans l'ordre croissant ; ainsi il y a autant de triplets de 3 entiers distincts pris dans $[\![1;10]\!]$ rangés dans l'ordre croissant que de parties de 3 éléments dans $[\![1;10]\!]$.

   $$\boxed{p(A) = \frac{\binom{10}{3}}{10^3} = \frac{120}{1000} = 0,12}$$

2. Soit B :« les trois nombres sont rangés dans l'ordre croissant ». Il faut donc dénombrer les triplets (n_1, n_2, n_3) d'entiers entre 1 et 10, avec $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$.

   Une idée consiste à associer à un triplet (n_1, n_2, n_3) de B, le triplet (n_1, n_2+1, n_3+2) d'entiers distincts rangés dans un ordre strictement croissant. Les entiers n_1, n_2+1, n_3+2 étant donc dans $[\![1;12]\!]$.

   Réciproquement à un triplet (m_1, m_2, m_3) d'entiers strictement croissants de $[\![1;12]\!]$, on peut associer un triplet d'entiers croissants en prenant (m_1, m_2-1, m_3-2) (entiers dans $[\![1;10]\!]$). Cette association est donc bijective et de ce fait, le nombre de triplets d'entiers croissants est donc égal au nombre de parties de 3 entiers pris dans $[\![1;12]\!]$ (cf 1.), ainsi

   $$\boxed{p(B) = \frac{\binom{12}{3}}{10^3} = \frac{220}{1000} = 0,22}$$

EXERCICE 2 :

Si l'on considère l'événement A :« un trésor est placé dans un des coffres », l'énoncé permet d'écrire que $p(A) = p$.

Considérons pour tout $i \in \{1, 2, \dots, N\}$ l'événement A_i :« un trésor est placé dans le coffre d'indice i. »

Compte-tenu des notations $A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$, or les A_i sont deux à deux incompatibles donc $p(A) = \sum_{i=1}^{N} p(A_i) = \sum_{i=1}^{N} a = Na$ (puisque le trésor est placé de façon équiprobable, $p(A_i) = a$, $\forall i$)

$$\text{Ainsi } p = Na \Leftrightarrow a = \frac{p}{N}, \text{ donc } p(A_i) = \frac{p}{N}\ , \forall i \in \{1, 2, \dots, N\}$$

Répondre à la question, c'est calculer $p_B(A_N)$ avec $B = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{N-1}}$.

On a par ailleurs, $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - p(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{N-1}) = 1 - (N-1)\dfrac{p}{N}$ (toujours avec l'incompatibilité des A_i)

et $p(A_N \cap \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \ldots \cap \overline{A_{N-1}}) = p(A_N) = \dfrac{p}{N}$

Avec la formule de Bayes, on obtient donc :

$$p_B(A_N) = \frac{p(A_N \cap B)}{p(B)} = \frac{p/N}{1 - \frac{N-1}{N}p} = \boxed{\frac{p}{N - (N-1)p}}$$

EXERCICE 3 :

1. $\text{card}(\Omega) = 10 \times 9 \times 8 = 720$ tirages possibles.

   - Tirages comportant une seule boule noire : $\boxed{N|B|B}$ ou $\boxed{B|N|B}$ ou $\boxed{B|B|N}$ $\longrightarrow 3 \times 2 \times 8 \times 7 = 336$ possibilités ; (ou si l'on souhaite utiliser les arrangements et les combinaisons $\binom{2}{1} \times \binom{3}{1} \times A_8^2$)

   - Tirages comportant deux boules noires : $\boxed{N|B|N}$ ou $\boxed{N|N|B}$ ou $\boxed{B|N|N}$ $\longrightarrow 3 \times 2 \times 8 = 48$ possibilités ; (ou si l'on souhaite utiliser les arrangements et les combinaisons $\binom{3}{1} \times \binom{8}{1} \times A_2^2$)

   Si l'on note $N_{1/2}$ l'événement cherché : $\boxed{p(N_{1/2}) = \dfrac{384}{720} = \dfrac{8}{15}}$

2. Notation d'événement : N_1 :« La première boule tirée est noire » et $p(N_1) = \dfrac{2 \times 9 \times 8}{720} = \dfrac{1}{5}$.

   répondre à la question c'est calculer $p_{N_{1/2}}(N_1)$ et

   $$p_{N_{1/2}}(N_1) = \frac{p(N_{1/2} \cap N_1)}{p(N_{1/2})} = \frac{p(N_1)}{p(N_{1/2})} = \frac{1/5}{8/15} = \boxed{\frac{3}{8}}$$

   (en effet $N_{1/2} \cap N_1 = N_1$)

3. Probabilité que la troisième boule du tirage soit noire (événement noté N_3) : on trouve assez facilement que $\boxed{p(N_3) = p(N_1) = \dfrac{1}{5}}$.

EXERCICE 4 :

15 boules : une noire, 5 blanches et 9 rouges.

1. Le tirage est simultané donc pas de répétition de boules, pas d'ordre, l'outil mathématique adapté pour débombrer les cas possibles est la combinaison. Un tirage est une combinaison de 3 boules parmi 15. Le nombre de tirages est donc égal à $\binom{15}{3}$, c'est dire $\text{card}(\Omega) = \binom{15}{3}$. L'expérience est ici modélisée par l'équiprobabilité donc

   (a) $p(A) = \dfrac{\binom{1}{1} \times \binom{5}{1} \times \binom{9}{1}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{45}{455} = \dfrac{9}{91}$; (1 boule de chaque couleur + principe multiplicatif)

   (b) Pour la réalisation de B : 2 possibiltés dans la répartition des couleurs $\rightarrow$ $\boxed{N|R|R}$ ou $\boxed{N|B|R}$ donc $p(B) = \dfrac{\binom{1}{1} \times \binom{9}{2}}{\binom{15}{3}} + p(A) = \dfrac{81}{455}$;

   (c) Il n 'est pas possible d'avoir trois noires : 2 possibilités $\rightarrow C$: $\boxed{R|R|R}$ ou $\boxed{B|B|B}$ donc $p(C) = \dfrac{\binom{9}{3}}{\binom{15}{3}} + \dfrac{\binom{5}{3}}{\binom{15}{3}} = \dfrac{94}{455}$.

2. Les tirages s'effectuent successivement, avec remise. L'ordre est donc important et des répétitions sont possibles donc un tirage est une 3-liste sur l'ensemble des 15 boules. On a donc $\text{card}(\Omega) = 15^3$.

   (a) Sans ordre, d'après la question 1.a, 45 tirages tricolores sont possibles. 3! façons d'ordonner les couleurs donc $\text{card}(A) = 3! \times 45$ et par suite $p(A) = \dfrac{6 \times 45}{15^3} = 0,08$.

   (b) Toujours deux configurations :
   - $\boxed{N|R|R}$, $\boxed{R|N|R}$ et $\boxed{R|R|N}$ sont les tirages possibles et le nombre de tirages sans ordre est 36 (cf.1b)
   - $\boxed{N|R|B}$ et ses variantes suivant l'ordre donnent un nombre possibilités de $3! \times 45$ (vu plus haut).

   Ainsi $p(B) = \dfrac{6 \times 45 + 3 \times 36}{15^3} = 0.112$

   (c) Trois configurations sont possibles : $\boxed{N|N|N}$ (1 possibilité) ; $\boxed{R|R|R}$ (9^3 possibilités) et $\boxed{B|B|B}$ (5^3 possibilités).
   $p(C) = \dfrac{1^3 + 5^3 + 9^3}{15^3} = \dfrac{19}{75}$.

EXERCICE 5 :

Tirages successifs de 12 cartes, sans remise, d'un jeu de 52 cartes : l'ordre est important puisque les tirages sont successifs et il n'y a pas de répétirion puisque les tirages sont sans remise. Le tirage est donc un arrangement de 12 cartes parmi 52 cartes et $\text{card}(\Omega) = A_{52}^{12} = \dfrac{52!}{(52-12)!}$

1. Le dénombrement des tirages favorables se fait suivant le protocole :

   - Choix des places des as : combinaisons de 4 places parmi 12 $\to \binom{12}{4} = 495$;
   - Ordre des as : permutations de 4 as $\to 4! = 24$;
   - Possibilités de compléments de 8 cartes : arrangement de 8 parmi 48 cartes $\to A_{48}^{8}$.

   Ainsi si l'on nomme A_4 :« tirage de 4 as », on a donc $p(A_4) = \dfrac{495 \times 24 \times A_{48}^{8}}{A_{52}^{12}} \approx 1,83 \times 10^{-3}$.

2. Protocole de dénombrement dans le cas de 4 as consécutifs :

   - Possibilités de placement du premier as :

1	2	3	4	5	6	7	8	9			
as	as	as	as								
	as	as	as	as							
..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..	..
								as	as	as	as

     On dénombre donc 9 façons de placer 4 as qui se suivent.
   - Ordre des as : à nouveau permutations de 4 as $\to 4! = 24$;
   - Possibilités de compléments de 8 cartes : arrangement de 8 parmi 48 cartes $\to A_{48}^{8}$.

   Ainsi si l'on nomme A_{4C} :« tirage de 4 as consécutifs », on a donc $p(A_{4C}) = \dfrac{9 \times 24 \times A_{48}^{8}}{A_{52}^{12}} \approx 3,32 \times 10^{-5}$.

3. 7 piques et 2 dames :
   Il faut considérer deux situations : tirage avec la dame de pique auquel cas, il ne faut plus qu'une dame pour en avoir deux et tirage sans la dame de pique qu'il faudra compléter par deux dames.
   (a) Avec :
   - choix des 7 piques $\to \binom{12}{6}$ (6 car dans les 7 piques figure la dame de pique) ;
   - possibilités de placement des 7 piques $\to \binom{12}{7}$;
   - choix de la deuxième dame $\to \binom{3}{1}$;
   - placement de la deuxième dame $\to \binom{5}{1}$;
   - possibilités de compléments de 4 cartes (12-6-2) $\to A_{36}^{4}$.

   (b) Sans :
   - choix des 7 piques $\to \binom{12}{7}$ (pas de dame de pique) ;
   - possibilités de placement des 7 piques $\to \binom{12}{7}$;
   - choix des deux dames $\to \binom{3}{2}$ (3 car il ne faut pas le dame de pique, sinon il y aurait 8 piques) ;
   - placement des dames $\to A_5^2$;
   - possibilités de compléments des 3 autres cartes $\to A_{36}^{3}$.

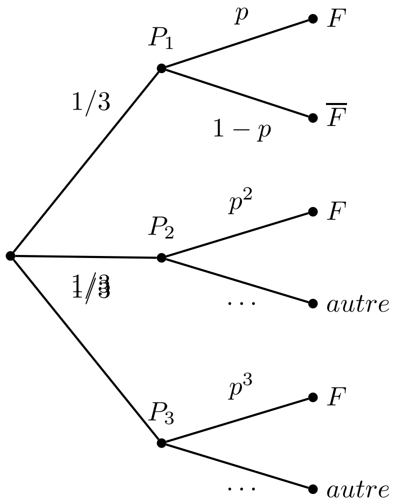
   Ainsi si l'on nomme T_{7p2d} :« tirage de 7 piques et deux dames », on a donc

$$p(T_{7p2d}) = \frac{\binom{12}{6} \times \binom{12}{7} \times 3 \times 5 \times A_{36}^{4} + \binom{12}{7} \times \binom{12}{7} \times \binom{3}{2} \times A_5^2 \times A_{36}^{3}}{A_{52}^{12}} \approx \ldots.$$

EXERCICE 6 :

On note les événements de la façon suivante :
- F :« tous les souriceaux sont des femelles » ;
- $\forall i \in \{1, 2, 3\}, P_i$:« la portée est de i souriceaux ».

1. Calcul de $p(F)$:



Avec la formule des probabilités totales, on obtient

$$p(F) = p(P_1)p_{P_1}(F) + p(P_2)p_{P_2}(F) + p(P_3)p_{P_3}(F)$$

$$\boxed{p(F) = \frac{1}{3}p + \frac{1}{3}p^2 + \frac{1}{3}p^3 = \frac{1}{3}(p + p^2 + p^3)}.$$

en effet, pour le calcul de $p_{P_3}(F)$, on adopte le principe multiplicatif dans le cas d'événements indépendants (le sexe de chaque souriceau est indépendant des deux autres)

2. Il s'agit ici de calculer $p_F(P_1)$: on utilise la formule de Bayes ($p(F) \neq 0$)

$$p_F(P_1) = \frac{p(P_1)p_{P_1}(F)}{p(F)} = \frac{\frac{1}{3}p}{\frac{1}{3}(p + p^2 + p^3)} = \boxed{\frac{1}{1 + p + p^2}}$$

EXERCICE 7 :

L'univers est $\Omega = \{a, b, c\}^n$ et donc $\text{card}(\Omega) = 3^n$.

Dénombrons les possibilités d'élection de a :

1. Le candidat a reçoit n voix $\to$ 1 seule possibilité ;
2. Le candidat a reçoit $n-1$ voix $\to$ $2n$ possibilités ;
   en effet
   - choix de la personne qui n'a pas voté pour a : n possibilités ;
   - 2 choix de vote : b ou c.
3. Le candidat a reçoit $n-2$ voix $\to$ $\binom{n}{2} \times 4$ possibilités ;
   en effet
   - choix des personnes qui n'ont pas voté pour a : $\binom{n}{2}$ possibilités ;
   - Deux personnes avec 2 choix de vote : b ou c donne 2^2 possibilités.

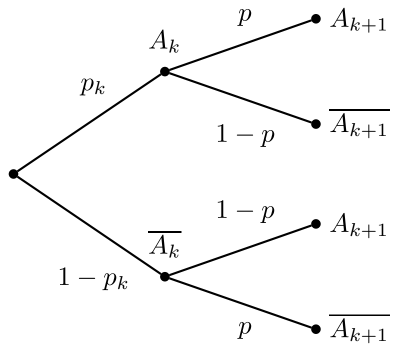
Si l'on note A :« a est élu », on obtient $p(A) = \dfrac{1 + 2n + 4\binom{n}{2}}{3^n} = \dfrac{2n^2 + 1}{3^n}$

« aucun président n'est élu » est l'événement contraire de P_e :« l'un des candidats a , b ou c est élu » et $p(P_e) = p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) = 3p(A)$ car les événements sont 2 à 2 incompatibles.

On obtient donc $p(P_e) = 3 \times \dfrac{2n^2 + 1}{3^n} = \dfrac{2n^2 + 1}{3^{n-1}}$ d'où $\boxed{p(\overline{P_e}) = 1 - \dfrac{2n^2 + 1}{3^{n-1}}}$

EXERCICE 8 :

On note $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, A_k :« I_k transmet la même information que celle que I_1 a reçu. », ce qui permet d'écrire que $p_k = p(A_k)$.



$p_{\overline{A_k}}(A_{k+1}) = 1-p$: en effet, I_{k+1} transmet l'information que I_1 a reçu sachant que I_k ne l'a pas transmise mais son contraire.

- A_k et $\overline{A_k}$ sont incompatibles car l'information transmise est soit « oui » ou « non » ;
- $A_k \cup \overline{A_k} = \Omega$ car l'on transmet obligatoirement une information ;
- $(A_k, \overline{A_k})$ constitue donc un système complet d'événements.

On peut donc utilise la formule des probabilités totales :

$$p(A_{k+1}) = p(A_k \cap A_{k+1}) + p(\overline{A_k} \cap A_{k+1}) = p(A_k)p_{A_k}(A_{k+1}) + p(\overline{A_k})p_{\overline{A_k}}(A_{k+1})$$

$$\text{d'où } \boxed{p_{k+1} = p_k(2p-1) + 1 - p}$$

A partir de là, on étudie la suite $(p_k)_{k\geqslant 1}$ qui est arithmético-géométrique.

- point fixe : soit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = \lambda(2p-1) + 1 - p \Leftrightarrow \lambda = \dfrac{1}{2}$;
- étude de la suite $(p_k - \lambda)$: $\forall k, p_{k+1} - \lambda = p_k(2p-1) + 1 - p - \lambda(2p-1) - 1 + p = (p_k - \lambda)(2p-1)$

  $(p_k - \lambda)$ est donc géométrique de raison $(2p-1)$, ce qui permet d'écrire que $\forall k \geqslant 1$, $p_k - \lambda = (p_1 - \lambda)(2p-1)^{k-1}$ avec $p_1 = p$.

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \boxed{p_k = \frac{1}{2} + \left(p - \frac{1}{2}\right)(2p-1)^{k-1}}$$

Comme $p \in]0,1[$, $-1 < 2p-1 < 1$ et $(2p-1)^{k-1} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'où

$$\boxed{\lim_{k\to+\infty} p_k = \frac{1}{2}}$$

EXERCICE 9 :

Les tirages sont simultanés donc on utilise les combinaisons comme outil de dénombrement. Tout d'abord $\text{card}(\Omega) = \binom{5}{2} = 10$.
On note B_i :« on obtient i boules noires » avec $i \in \{0,1,2\}$

1. $p(B_0) = \dfrac{\binom{2}{0}\times\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \boxed{\dfrac{3}{10}}$; $p(B_1) = \dfrac{\binom{2}{1}\times\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}} = \boxed{\dfrac{6}{10}}$ et $p(B_2) = \dfrac{\binom{2}{2}\times\binom{3}{0}}{\binom{5}{2}} = \boxed{\dfrac{1}{10}}$.
2. Le cardinal de l'univers est le même que précédemment. $p(B_0) = \dfrac{\binom{1}{0}\times\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}} = \boxed{\dfrac{6}{10}}$ et $p(B_1) = \dfrac{\binom{1}{1}\times\binom{4}{1}}{\binom{5}{2}} = \boxed{\dfrac{4}{10}}$.
3. (a) Dans cette question, on se retouve dans la situation de la question 1.
   Les deux boules tirées sont simplement déposées dans l'urne U_1, on peut écrire que $p(X_1 = i) = p(B_i)$ pour $i \in \{0,1,2\}$, c'est à dire

   $$\boxed{p(X_1 = 0) = 0,3\ ,\ p(X_1 = 1) = 0,6 \text{ et } p(X_1 = 2) = 0,1}$$

   (b) La question 1. permet d'obtenir une probabilité conditionnelle : $p_{(X_{n-1}=2)}(X_n = 2) = 0,1$ (en effet c'est la probabilité de tirer deux boules noires simultanément dans une urne contenant 2 noires et 3 blanches : c'est le cas de l'urne U_{n-1} dans cette hypothèse).
   D'autre part, on peut utiliser la formule ds probabilités totales avec $(X_{n-1} = i)_{0\leqslant i\leqslant 2}$ système complet d'événements pour déterminer $p(X_n = 2)$ et en remarquant que

   $$p_{(X_{n-1}=1)}(X_n = 2) = 0 \text{ et } p_{(X_{n-1}=0)}(X_n = 2) = 0$$

   (en effet, on ne peut pas tirer deux boules noires de l'urne U_{n-1} si elle n'en contient qu'une ou aucune)

$$p(X_n = 2) = p(X_{n-1} = 2)p_{(X_{n-1}=2)}(X_n = 2) = \boxed{0,1p(X_{n-1} = 2)}$$

On remarque que la suite $(p(X_n = 2))_{n\geqslant 1}$ est géométrique de raison $0,1$ et de premier terme $p(X_1 = 2) = 0,1$, donc on obtient

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \text{p}(X_n = 2) = (0,1)^n}$$

(c) On applique la formule des probabilités totales au système complet $(X_n = i)_{0\leqslant i\leqslant 2}$, en remarquant comme précédemment que l'urne U_{n+1} ne peut contenir 1 boule noire si U_n n'en contient pas et que si U_n contient 1 boule noire, elle a donc 4 boules blanches et la question 2 permet d'obtenir la probabilité conditionnelle souhaitée. Ainsi

$$p(X_n = 1) = p(X_n = 1)p_{(X_n=1)}(X_{n+1} = 1) + p(X_n = 2)p_{(X_n=2)}(X_{n+1} = 1) = \boxed{0,6p(X_n = 2) + 0,4p(X_n = 1)}$$

Soit, pour tout entier naturel n non nul, la propriété $P(n)$: $p(X_n = 1) = 2(0,4)^n - 2(0,1)^n$.

Initialisation : $p(X_1 = 0,6)$ et $2(0,4)^1 - 2(0,1)^1 = 0,6$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. On suppose que la propriété $P(n)$ est vraie au rang n. Démontrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned}
p(X_n = 1) &= 0,6p(X_n = 2) + 0,4p(X_n = 1)\\
&= 0,6(0,1)^n + 0,4(2(0,4)^n - 2(0,1)^n)\\
&\quad \textit{hypothèse de récurrence et Q.3.b}\\
&= 2(0,4)^{n+1} + (0,1)^n(0,6 - 0,8)\\
&= 2(0,4)^{n+1} - 0,2(0,1)^n\\
&= 2(0,4)^{n+1} - 2(0,1)^{n+1}
\end{aligned}$$

donc $P(n + 1)$ est vraie.
Ainsi, d'après le raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel n non nul :

$$\boxed{p(X_n = 1) = 2(0,4)^n - 2(0,1)^n}$$

EXERCICE 10 :

1. Dans cette question, on suppose que l'urne contient initialement b boules blanches et r boules rouges. ($(b, r) \in (\mathbb{N}^*)^2$). On note B_i :« boule blanche au i-ème tirage » et $R_i = \overleftarrow{B_i}$.

(a) $\boxed{p(B_1) = \dfrac{b}{b+r}}$.

(b) Comme b et r sont non nuls, $\dfrac{b}{b+r} \in]0,1[$. (B_1, R_1) est un système complet d'événements de probabilité non nulle. On cherche à calculer $p_{B_2}(B_1)$

$$p_{B_2}(B_1) = \frac{p(B_1)p_{B_1}(B_2)}{p(B_2} \ (\bigstar) \text{ avec } p_{B_1}(B_2) = \frac{b+c}{b+r+c}$$

Il reste donc à calculer $p(B_2)$ avec la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}
p(B_2) = p(B_1)p_{B_1}(B_2) + p(R_1)p_{R_1}(B_2) &= \frac{b}{b+r}\frac{b+c}{b+r+c} + \frac{r}{b+r}\frac{b}{b+r+c}\\
&= \frac{b(b+r+c)}{(b+r)(b+r+c)}\\
&= \frac{b}{b+r}
\end{aligned}$$

En reportant dans $(\bigstar)$, $p_{B_2}(B_1) = \dfrac{\dfrac{b}{b+r}\dfrac{b+c}{b+r+c}}{\dfrac{b}{b+r}} = \dfrac{b+c}{b+r+c}$

(c) On cherche donc $p(B_1 \cap R_2 \cap B_3)$.
La formule des probabilités composées donne

$$\begin{aligned} p(B_1 \cap R_2 \cap B_3) = p(B_1)p_{B_1}(R_2) + p(R_1)p_{B_1 \cap R_2}(B_3) &= \frac{b}{b+r}\frac{r}{b+r+c}\frac{b+c}{b+r+2c} \\ &= \frac{br(b+c)}{(b+r)(b+r+c)(b+r+2c)} \end{aligned}$$

(d) On suppose que $r = c$. On effectue n tirages. On cherche donc $p(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n)$

$$\begin{aligned} p(B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_n) &= p(B_1)p_{B_1}(B_2) + \ldots p(R_1)p_{B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_{n-1}}(B_n) \\ &= \frac{b}{b+r}\frac{b+r}{b+2r}\cdots\frac{b+(n-1)r}{b+nr} \\ &= \frac{b}{b+nr} \end{aligned}$$

2. On considère le système complet d'événements (B_1, R_1) de probabilités non nulles.

(a) La formule des probabilités totales donne $p(B_{n+1}) = p(B_1)p_{B_1}(B_{n+1}) + p(R_1)p_{R_1}(B_{n+1})$
D'après les notations
- $p(B_{n+1}) = u_{n+1}(x, y)$;
- $p(B_1) = \dfrac{x}{x+y}$ et $p(R_1) = \dfrac{y}{x+y}$ (cf 1.a)
- $p_{B_1}(B_{n+1})$ est la probabilité de tirer une boule blanche au n-ème tirage dans une urne contenant initialement $x + c$ blanches et y noires, c'est $u_n(x + c, y)$;

D'où

$$u_{n+1} = u_n(x+c, y)\frac{x}{x+y} + u_n(x, y+c)\frac{y}{x+y}$$

(b) Par récurrence, on démontre que $u_n(x, y) = \dfrac{x}{x+y}$ avec $(n, x, y) \in (\mathbb{N}^*)^3$ (laissé au lecteur).

EXERCICE 11 :

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{2}{x}\right) - x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 \quad \text{si } x = 0 \end{cases}$

1. $\forall x \neq 0,\ \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = x\cos\left(\dfrac{2}{x}\right) - 1$ et $\forall x \neq 0,\ -1 \leqslant \cos\left(\dfrac{2}{x}\right) \leqslant 1$.

$\rightarrow$ Si $x > 0$, $-x \leqslant x\cos\left(\dfrac{2}{x}\right) \leqslant x \Leftrightarrow -x - 1 \leqslant x\cos\left(\dfrac{2}{x}\right) - 1 \leqslant x - 1$ d'où $\dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \underset{x \to 0^+}{\longrightarrow} -1$, ce qui justifie la dérivabilité de f à droite en 0 et $f'_d(0) = -1$.

$\rightarrow$ Si $x < 0$, un travail analogue sur les inégalités conduit à prouver que f est dérivable à gauche en 0 et que $f'_g(0) = -1$.

Finalement $f'_g(0) = f'_d(0) = -1$ donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -1 < 0$.

2. f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ (composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$) et pour tout $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2x\cos\left(\frac{2}{x}\right) + x^2 \times \left(-\frac{2}{x^2}\right) \times \left(-\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right) = 2x\cos\left(\frac{2}{x}\right) + 2\sin\left(\frac{2}{x}\right) - 1$$

Soit $u_n = \dfrac{2}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ le terme général d'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$: il est clair que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

(*ce choix est motivé de la façon suivante : compte-tenu de l'expression de $f'(x)$, un choix judicieux de u_n consiste à annuler le cosinus et rendre le sinus égal à 1*)

$\forall n \in \mathbb{N},\ f'(u_n) = 2u_n\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) + 2\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) - 1 = 2 \times 0 + 2 \times 1 - 1 = 1$

On peut en déduire que f' n'est pas continue en 0 : en effet, si elle l'était, pour **toute** suite de réels (u_n) tendant vers 0, on aurait $f'(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f'(0) = -1$. Or la suite précédente ne vérifie pas cette propriété donc f' n'est pas continue en 0.

EXERCICE 12 :

Partie A :

Soient a et b deux réels tels que $a < b$, et g une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$.

1. $\Psi(b) = 0 \Leftrightarrow \boxed{K = \dfrac{g(b) - g(a) - g'(a)(b-a)}{(b-a)^2}}$

2. g une application de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$ et la fonction $t \longmapsto -g(a) - g'(a)(t-a) - K(t-a)^2$ est une fonction polynomiale, également de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$: Ψ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$. De plus, $\Psi(a) = 0 = \Psi(b)$. D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a,b[$ tel que $\Psi'(c) = 0$.

   $\forall t \in [a,b], \Psi'(t) = g'(t) - g'(a) - 2K(t-a)$ et $\Psi'(a) = 0$, le résultat précédent $\Psi'(c) = 0$ et les propriétés de continuité et de dérivabilité vérifiées par Ψ' amène naturellement à appliquer le théorème de Rolle sur $[a,c]$: il existe $d \in]a,c[$ tel que $\Psi''(d) = 0$.

   Or $\forall t \in [a,b],\ \Psi''(t) = g''(t) - 2K$ donc $\Psi''(d) = 0 \Leftrightarrow K = \dfrac{g''(d)}{2}$.

3. L'expression de K obtenue à la question 1. permet d'écrire qu'il existe $d \in]a,b[$ tel que
$$g(b) = g(a) + (b-a)g'(a) + \frac{(b-a)^2}{2}g''(d).$$

Partie B :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \dfrac{-x}{\operatorname{sh}(-x)} = \dfrac{-x}{-\operatorname{sh}(x)} = \dfrac{x}{\operatorname{sh}(x)} = f(x)$ donc f est paire.
2. Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{2x}{e^x - e^{-x}} = \dfrac{2xe^x}{e^{2x}-1} = \dfrac{2e^x}{\frac{e^{2x}-1}{x}}$.

   $h : x \longmapsto e^{2x}$ est dérivable en 0 et $\dfrac{e^{2x}-1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} h'(0) = 2$ donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \dfrac{2e^0}{2} = 1 = f(0)$ donc la fonction f est continue en 0.
3. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$, sh est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (composée, somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$). D'après la question A.2, on a :
   - si $x > 0$, il existe $d \in]0,x[$ tel que $\operatorname{sh}(x) = \operatorname{sh}(0) + x\operatorname{sh}'(0) + \dfrac{x^2}{2}\operatorname{sh}''(d) = x + \dfrac{x^2}{2}\operatorname{sh}(d)$.
   - si $x < 0$, on obtient un résultat comparable sur l'intervalle $[x,0]$.

   Ainsi $\forall x \neq 0$, il existe d_x entre 0 et x tel que $\boxed{\operatorname{sh}(x) = x + \dfrac{x^2}{2}\operatorname{sh}(d_x)\ (\bigstar)}$.

   (b) sh est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
   - $x > 0$, $0 < d_x < x$ implique $0 < \operatorname{sh}(d_x) < \operatorname{sh}(x)$ donc $(\bigstar) \Rightarrow |\operatorname{sh}(x) - x| = \dfrac{x^2}{2}|\operatorname{sh}(d_x)| \leqslant \dfrac{x^2}{2}|\operatorname{sh}(x)|$.
   - $x < 0$, $x < d_x < 0$ implique $\operatorname{sh}(x) < \operatorname{sh}(d_x) < 0$ donc $|\operatorname{sh}(d_x)| < |\operatorname{sh}(x)|$ et $(\bigstar) \Rightarrow |\operatorname{sh}(x) - x| = \dfrac{x^2}{2}|\operatorname{sh}(d_x)| \leqslant \dfrac{x^2}{2}|\operatorname{sh}(x)|$.
   - L'inégalité à obtenir est vérifiée pour $x = 0$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ |\operatorname{sh}(x) - x| \leqslant \frac{x^2}{2}|\operatorname{sh}(x)|}$$

   (c) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, $\left|\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\right| = \left|\dfrac{x - \operatorname{sh}(x)}{x\operatorname{sh}(x)}\right| \leqslant \left|\dfrac{x^2\operatorname{sh}(x)}{2x\operatorname{sh}(x)}\right| = \dfrac{|x|}{2}$

   $\dfrac{|x|}{2} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ donc $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ ce qui prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

EXERCICE 13 :

1. Soit $a < b$ deux réels et $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ une fonction continue sur $[a,b]$.

(a) Soit $g : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ définie par $g(x) = f(x) - x$.
Comme f est continue sur $[a, b]$, g est continue sur $[a, b]$.

- $g(a) = f(a) - a$; $f(a) \in [a, b]$ donc $f(a) \geqslant a \Leftrightarrow g(a) \geqslant 0$;
- $g(b) = f(b) - b$ et $f(b) - b \leqslant 0$ donc $g(b) \leqslant 0$.

0 est compris entre $g(a)$ et $g(b)$ donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

(b) Comme f est dérivable sur $]a, b[$ et qu'il existe un réel k, $0 \leqslant k < 1$, tel que pour tout $x \in]a, b[$, $|f'(x)| \leqslant k$, on est dans le cadre d'utilisation de l'inégalité des accroissements finis :

$$\forall (x, y) \in ([a, b])^2,\ |f(x) - f(y)| \leqslant k|x - y| \ (\mathbf{I_{af}})$$

i. Supposons que f admet deux points fixes distincts x_0 et x_1 dans $[a, b]$.

D'après $(\mathbf{I_{af}})$, on a $|f(x_1) - f(x_0)| \leqslant k|x_1 - x_0| < |x_1 - x_0|$ $(k < 1)$, et compte-tenu de $f(x_0) = x_0$ et de $f(x_1) = x_1$, on obtient l'inégalité $|x_1 - x_0| < |x_1 - x_0|$. On aboutit donc à une contradiction qui remet en cause notre supposition. Le réel x_0 est donc unique.

ii. Comme $[a, b]$ est stable par f, on démontre par récurrence que pour tout $n \in [a, b]$, $u_n \in [a, b]$ (laissé au lecteur).
De ce fait, on peut écrire, avec $(\mathbf{I_{af}})$: $|f(u_n) - f(x_0)| \leqslant k|u_n - x_0| \Rightarrow |u_{n+1} - x_0| \leqslant k|u_n - x_0|$

On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - x_0| \leqslant k^n |u_0 - x_0|$ $(\mathbf{P(n)})$

Initialisation : $|u_0 - x_0| \leqslant |u_0 - x_0|$ donc $\mathbf{P(0)}$ est vraie.

Hérédité : On suppose que la propriété $\mathbf{P(n)}$ est vraie au rang n. Démontrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$.

$$\begin{aligned}\mathbf{P(n)}\text{ est vraie } &\Leftrightarrow |u_n - x_0| \leqslant k^n |u_0 - x_0| \\ &\Leftrightarrow k|u_n - x_0| \leqslant k \times k^n |u_0 - x_0| \\ &\Rightarrow |u_{n+1} - x_0| \leqslant k^{n+1} |u_0 - x_0| \quad (\text{car } |u_{n+1} - x_0| \leqslant k|u_n - x_0|)\end{aligned}$$

donc $\mathbf{P(n+1)}$ est vraie.

Ainsi, grâce au principe du raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel n :

$$|u_n - x_0| \leqslant k^n |u_0 - x_0| \quad (\bigstar)$$

Comme $k \in [0, 1[$, $k^n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, $|u_n - x_0| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = x_0}$$

2. Soit g la fonction définie par $g(x) = (1 + x)^{1/3}$

(a) $g(1) = 2^{1/3}$ d'où $g(1) \in [1, 2]$; de même $g(2) \in [1, 2]$ et la fonction g est croissante sur $[1, 2]$ (laissé au lecteur) donc l'intervalle $[1, 2]$ est stable par g. $1 + x > 0$ sur $[1, 2]$ donc g est définie sur cet intervalle et elle est continue sur $[1, 2]$.
g satisfait aux conditions de la partie 1.b.i) donc il existe un unique $\alpha \in [1, 2]$ tel que $g(\alpha) = \alpha$.

(b) g est dérivable sur $[1, 2]$ et pour tout $x \in [1, 2]$, $g'(x) = \dfrac{1}{3}(1 + x)^{-2/3}$.

or sur $[1, 2]$, $1 + x > 1 \Rightarrow (1 + x)^{2/3} > 1 \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{(1 + x)^{2/3}} < 1 \Rightarrow 0 < g'(x) < \dfrac{1}{3}$ d'où $|g'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3}$ sur $[1, 2]$
et en posant $v_{n+1} = g(v_n)$ et $v_0 \in [1, 2]$, on construit une suite récurrente de limite α (cf 2.b)

$v_0 \in [1, 2]$ et $\alpha \in [1, 2]$ donc $|v_0 - \alpha| \leqslant 1$ d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ (adaptation de l'inégalité $(\bigstar)$)

(c) On aura $|v_n - \alpha| \leqslant 10^{-3}$ si $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 10^{-3}$ (en effet $\forall n \in \mathbb{N}$, $|v_n - \alpha| \leqslant \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$)

L'entier $n = 7$ convient. (une résolution avec le logarithme népérien permet de trouver cet entier)

3. Soit (E) l'équation $x^3 - x - 1 = 0$.

(a) $(E):\ x^3 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^3 = x + 1 \underset{x \mapsto x^{1/3}\ bijection...}{\Longleftrightarrow} x = (x+1)^{1/3} \Leftrightarrow g(x) = x \Leftrightarrow x = \alpha$

Montrer que (E) admet pour unique solution sur l'intervalle $[1, 2]$ le réel α.

(b) Valeur approchée de α à 10^{-3} : $v_7 \approx 1,324$. (l'entier $n = 7$ est une valeur suffisante, en fonction de la valeur de v_0, il conviendrait de calculer d'autres valeurs de v_n pour $n < 7$ pour voir à partir de quel rang l'approximation est obtenue)