EXERCICE 1 :

1. $\forall u \in E,\ 0.u = (0+0).u = 0.u + 0.u$ donc $0.u + (-0.u) = 0.u$ et donc $0_E = 0.u$.

2. Comm F est non vide, il existe $u \in F$ et $0.u = 0_E$; comme F est stable par multiplication, $0_E \in F$.

3. • $(0,0,0) \in F$ car $0+0+0=0$;

   • Soit $u = (x,y,z)$ et $v = (x',y',z')$ deux vecteurs de F.
   L'addition de $\mathbb{R}^3$ permet d'écrire que $u+v = (x+x', y+y', z+z')$.
   Et $(x+x') + (y+y') + (z+z') = (x+y+z) + (x'+y'+z') = 0+0 = 0$
   car $(u,v) \in F^2$ $(u \in F \Leftrightarrow x+y+z=0)$;

   F est donc stable pour l'addition.

   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u = (x,y,z) \in F$. On en déduit que $\lambda u = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ et comme $\lambda x + \lambda y + \lambda z = \lambda(x+y+z) = \lambda.0 = 0$, on en déduit que $\lambda u \in F$;

   F est donc stable pour la multiplication par un scalaire.

   F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

4. G est une partie non vide de $\mathbb{R}^3$ ($(1,0,0) \in G$) et $0_{\mathbb{R}^3} = (0,0,0) \notin G$ donc G n'est pas un sous-espace vectoriel.

EXERCICE 2 :

Soit E l'espace vectoriel des aplications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (on note $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$).

1. • La fonction nulle 0_E est bornée donc $0_E \in E_1$.
   • Soit $(f_1, f_2) \in E_1^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Comme f_1 et f_2 sont bornées, il existe $(M_1, M_2) \in (\mathbb{R}^+)^2$ tels que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_1(x)| \leqslant M_1 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R},\ |f_2(x)| \leqslant M_2$$
   Or $\forall x \in \mathbb{R},\ |(f_1+f_2)(x)| = |f_1(x) + f_2(x)| \leqslant |f_1(x)| + |f_2(x)| \leqslant M_1 + M_2$, ce qui prouve que $f_1 + f_2$ est bornée et donc $f_1 + f_2 \in E_1$.

   $\forall x \in \mathbb{R},\ |(\lambda f_1)(x)| = |\lambda f_1(x)| = |\lambda||f_1(x)| \leqslant |\lambda| M_1$ donc λf_1 est bornée et $\lambda f_1 \in E_1$.

   Les deux points précédents prouvent que E_1 est un sous-espace vectoriel de E.

2. Soit $E_2 = \{f \in E : f \text{ décroissante}\}$.
   Soit $f : x \longmapsto -x$. f est strictement décroissante donc $f \in E_2$. Or $-f = -1.f$ est strictement croissante donc n'appartient pas à E_2 et ainsi E_2 n'est pas stable par multiplication par un scalaire, donc E_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

EXERCICE 3 :

$F = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_2 = \overline{z_1}\right\}$.

1. Par exemple : $(1,1); (-\mathrm{i}, \mathrm{i}); \ldots$
2. Compte-tenu de la propriété relative à la conjugaison $\overline{z_+ z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$, on prouve facilement que F est stable par addition.
   Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $(z_1, z_2) \in F$, par conséquent $z_2 = \overline{z_1}$, d'où $\lambda z_2 = \lambda \overline{z_1} = \overline{\lambda z_1}$ car $\lambda \in \mathbb{R}$.
   On a donc $(\lambda z_1, \lambda z_2) \in F$, d'où $\lambda(z_1, z_2) \in F$ et F est stable pour multiplication par un scalaire réel.
   F est donc un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^2$ considéré comme un $\mathbb{R}$-ev.

   En revanche, si F est considéré comme un $\mathbb{C}$-ev, soit $u = (1,1) \in F$ et $\lambda = \mathrm{i}$, $\lambda u = (\mathrm{i}, \mathrm{i})$ et $\lambda u \notin F$ donc F n'est pas stable par multiplication d'un scalaire complexe. F n'est donc pas un sev de $\mathbb{C}^2$ considéré comme un $\mathbb{R}$-ev.

EXERCICE 4 :

Soit $f : [0,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\forall x \in [0,1[,\ f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{1-x}\right)$.

1. $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = x_n \sin\left(\dfrac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = x_n$ et $f(y_n) = y_n \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + 2n\pi\right) = -y_n$.

2. On souhaite déterminer $f([-1,1[)$. f est continue sur $[0,1[$ donc $f([0,1[)$ est un intervalle. (*conséquence du théorème des valeurs intermédiaires : l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle*)

   (a) $\forall x \in [0,1[,\ |f(x)| = \left|x \sin\left(\dfrac{1}{1-x}\right)\right| \leqslant |x| < 1$, par conséquent $f([0,1[) \subset]-1,1[$.

   (b) **théorème des valeurs intermédiaires** : *Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Pour tout couple $(a,b) \in I^2$, f atteint toute valeur k intermédiaire entre $f(a)$ et $f(b)$. (autrement dit : pour tout k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe c dans I tel que $f(c) = k$).*

   Pour déterminer $f([0,1[)$, d'après la question précédente, le « candidat idéal » est $]-1,1[$. Il ne reste plus qu'à prouver que $]-1,1[\subset f([0,1[)$ (double inclusion).

   Pour cela considérons $t \in]-1,1[$ et montrons que $t \in f([0,1[)$.

   Tout d'abord, $f(x_n) = x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $f(y_n) = -y_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$

   D'après les propriétés d'ordre des suites réelles convergentes ($\bigstar$), on peut donc dire que t est compris entre $-y_n$ et x_n , c'est à dire que t est une valeur intermédiaire entre $f(x_n)$ et $f(y_n)$.
   Ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, t est une image prise par la fonction f. Un travail sur les inégalités permet de prouver que $(x_n, y_n) \in ([0,1[)^2$,
   En effet, $n \geqslant 0 \Leftrightarrow 4n+1 \geqslant 1 \Leftrightarrow (4n+1)\pi \geqslant \pi \Rightarrow 0 < \dfrac{2}{(4n+1)\pi} \leqslant \dfrac{2}{\pi} < 1 \Rightarrow 0 \leqslant 1 - \dfrac{2}{(4n+1)\pi} < 1$
   $\Leftrightarrow 0 \leqslant x_n < 1$. On procède de même avec y_n ;

   donc $t \in f([0,1[)$.

($\bigstar$) : Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle convergente, l sa limite et $b \in \mathbb{R}$.
Si $b < l$, alors il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant N \Longrightarrow b < u_n$$

⋆⋆⋆⋆⋆

Démonstration :
La définition de la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers l assure l'exsitence de $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N_1 \Longrightarrow |u_n - l| \leqslant \frac{1}{2}|l-b| < |l-b| \quad \text{(on fait le choix de } \epsilon = \frac{1}{2}|l-b|)$$
$$\text{et } |u_n - l| < |l-b| \Longrightarrow un - l > -(l-b) \Longrightarrow u_n > b$$

La propriété reste vraie si l'on remplace dans la propriété $b < l$ par de $b > l$, alors il existe un rang N_2 à partir duquel $b > u_n$

EXERCICE 5 :

$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de période T. f admet $L \in \mathbb{R}$ pour limite en $+\infty$.

1. $f(t) \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} L \Rightarrow \forall \epsilon > 0$, il existe $A > 0$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ t \geqslant A \Rightarrow |f(t) - L| \leqslant \epsilon \quad (D)$$

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. $x + nT > A \Leftrightarrow nT > A - x \Leftrightarrow n > \dfrac{A-x}{T}$. On choisit donc $n = \mathrm{E}\left(\dfrac{A-x}{T}\right) + 1$.

3. Comme $x + nT > A$, en utilisant la définition (D), on peut écrire que $|f(x+nT) - L| \leqslant \epsilon$, ce qui compte-tenu de la périodicité de f, donne $|f(x) - L| \leqslant \epsilon$.

   Il est donc établi que pour tout $\epsilon > 0$, $|f(x) - L| \leqslant \epsilon$, ce qui implique que $|f(x) - L| = 0$ et donc $f(x) = L$. Ce qui précède étant vrai pour tout réel x, la fonction f est constante et égale à L.

Remarque Il est peut-être utile de revenir sur le fait que : soit a un réel, $\forall \epsilon > 0,\ |a| < \epsilon \Rightarrow a = 0$.

Supposons $a \neq 0$, existe-t-il un réel $\epsilon > 0$ tel que $|a| \geqslant 0$? en choisissant $\epsilon = \dfrac{|a|}{2}$, on a $|a| \geqslant \dfrac{|a|}{2}$ et $\dfrac{|a|}{2} > 0$ puisque $a \neq 0$. Compte-tenu de $|a| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 0$, on a établi la contraposée du résultat escompté.

EXERCICE 6 :

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue en 0 qui vérifie $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = f(x)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. La relation fonctionelle appliquée à $\dfrac{x}{2}$ donne $f\left(\dfrac{x}{2}\right)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Par une démonstration par récurrence, on démontre que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f\left(\frac{x}{2^n}\right) = f(x).$$
2. La suite $\left(\dfrac{x}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0. De plus f est continue en 0 donc $f(x) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} f(0)$ donc la suite $\left(f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right)$ est convergente de limite $f(0)$.

   or d'après ce qui précède, $\left(f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)\right)$ est une suite constante égale à $f(x)$. Par unicité de la limite d'une suite, on conclut que
$$f(x) = f(0)$$

EXERCICE 7 :

Déterminer le domaine de définition et de continuité de la fonction f en précisant le comportement aux bornes.
$$f(x) = \exp\left(\frac{\ln(x)}{\ln(x) - 1}\right)$$

- $\ln(x) - 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \mathrm{e}$ et ln est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc f est définie sur $\mathbb{R}^{+*} \setminus \{\mathrm{e}\}$. Elle est également continue sur cet ensemble (opérations sur les fonctions continues).
- $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{X\to -\infty} \frac{X}{X-1} = 1\end{array}\right\} \begin{array}{c}(\textit{composition}) \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{\ln(x)-1} = 1 \\ \displaystyle\lim_{y\to 1} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}\end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} \begin{array}{c}(\textit{composition}) \\ \displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x) = \mathrm{e}\end{array}$ ainsi f est prolongeable par continuité en 0, en posant $f(0) = \mathrm{e}$.
- Au voisinage de e, on a $\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}^\pm} \frac{\ln(x)}{\ln(x)-1} = \pm\infty$ et par composition avec les limites de la fonction exponenetielle, $\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}^-} f(x) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to \mathrm{e}^+} f(x) = +\infty$. f n'est pas prolongeable par continuité en e et la droite d'équation $x = \mathrm{e}$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$ lorsque x tend vers e^+.
- $\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{X\to +\infty} \frac{X}{X-1} = 1\end{array}\right\} \begin{array}{c}(\textit{composition}) \\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{\ln(x)-1} = 1 \\ \displaystyle\lim_{y\to 1} \mathrm{e}^y = \mathrm{e}\end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\a\\a\end{array}}\right\} \begin{array}{c}(\textit{composition}) \\ \displaystyle\lim_{x\to +\infty} f(x) = \mathrm{e}\end{array}$ donc $\mathcal{C}_f$ admet la droite d'équation $y = \mathrm{e}$ comme asymptote horizontale lorsque x tend vers $+\infty$.

EXERCICE 8 :

Étudier la limite suivante

$$\lim_{x\to\pi/3} \frac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\pi/3}$$

- $\forall x \in \mathbb{R},\ \sqrt{3}\cos(x)-\sin(x) = 2(\sin(\pi/3)\cos(x)-\cos(\pi/3)\sin(x)) = -2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$
- Ainsi l'expression devient $\dfrac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\pi/3} = -2\dfrac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{x-\frac{\pi}{3}} \underset{x\to\pi/3}{\longrightarrow} -2$ en effet $\dfrac{\sin(t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$

$$\boxed{\lim_{x\to\pi/3} \frac{\sqrt{3}\cos(x)-\sin(x)}{x-\pi/3} = -2}$$

EXERCICE 9 :

Étudier la limite suivante

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln(x)}$$

On pose $x = 1+t$, ainsi $x\to 1 \Leftrightarrow t\to 0$:

$$\frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln(x)} = \frac{\sqrt{2-(1+t)^2}-1}{\ln(1+t)} = \frac{\sqrt{1-2t-t^2}-1}{\ln(1+t)} \underset{quant.conj}{=} \frac{(1-2t-t^2)-1}{(1+\sqrt{1-2t-t^2})\ln(1+t)}$$
$$= -\frac{t}{\ln(1+t)} \times \frac{2+t}{1+\sqrt{1-2t-t^2}}$$

Or $\dfrac{2+t}{1+\sqrt{1-2t-t^2}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ et $\dfrac{\ln(1+t)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 1$ donc

$$\boxed{\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{2-x^2}-1}{\ln(x)} = -1}$$

EXERCICE 10 :

Étudier la limite suivante

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3}$$

- En utilisant les développements limités au voisisnage de 0 : $\sin(x) = x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)$
- Toujours les DL(0), $\cos(x) = 1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^3)$ et par inversion de DL(0), on obtient
$$\frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-\frac{x^2}{2}+o(x^3)} = 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3) \qquad car\ \frac{1}{1-x} \underset{0}{=} 1 + x + o(x)$$
- Or $\tan(x) = \sin(x) \times \dfrac{1}{\cos(x)} = \left(x - \dfrac{x^3}{6} + o(x^3)\right)\left(1+\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)\right) = x + \dfrac{x^3}{3} + o(x^3)$ (multiplication des DL, le terme $o(x^3)$ « absorbe » tous les termes dont l'exposant dépasse 3)
- On a donc : $\dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} = \dfrac{(x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)) - (x-\frac{x^3}{6}+o(x^3))}{x^3} = \dfrac{1}{2} + o(1)$

Ainsi $\boxed{\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan(x)-\sin(x)}{x^3} = \dfrac{1}{2}}$

EXERCICE 11 Tout d'abord, f est continue sur $]0;1]$ donc $f(]0;1])$ est iun intervalle.

- Soit $a \in]0;1]$, on a $0 < a \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant 1 - a < 1$. De plus $-1 \leqslant \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant 1$ donc on en conclut que
$$-1 < f(x) < 1 \text{ et donc } f\left(]0;1]\right) \subset]-1;1[$$
- Soit $b \in]-1;1[$, existe-t-il un a dans $]0;1]$ tel que $b = f(a)$?

  On considère la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$; on a, $f(x_n) = 1 - x_n$ et comme $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, on peut affirmer que $f(x_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
  De la même manière, en considérant la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $y_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + (2n+1)\pi}$, on obtient que $f(y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$.

  Compte-tenu de ces deux limites, il existe (définitions des limites) $N \in \mathbb{N}$ tel que
$$f(y_N) < b < f(x_N)$$
  la continuité de f sur $]0;1]$ et le théorème des valeurs intermédiaires permet d'écrire qu'il existe $a \in]x_N;y_N[$ tel que $b = f(a)$. On aura vérifié que x_n et y_n sont dans $]0;1]$ pour tout n.

  En effet : $2n\pi \geqslant 0 \Longrightarrow 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} \geqslant \dfrac{\pi}{2}$ et finalement $0 < x_n \leqslant \dfrac{2}{\pi} < 1$. Idem pour y_n. On a donc $]-1;1[\subset f(]0;1])$
  .
- D'où l'égalité.