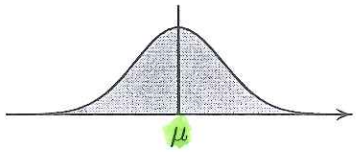
.1 Définition et courbe

Le diagramme en bâtons d'une loi binomiale (de paramètres n, et p) peut être approché par une courbe "en cloche" (quand n est grand et p pas trop voisin de 0 ou 1).

Cette courbe est celle d'une nouvelle loi de probabilité appelée LOI NORMALE.



Une loi normale a 2 paramètres :
• μ ("*mu*") est l'**espérance mathématique** (ou **moyenne**),
• σ ("*sigma*") est l'**écart type**.

Si une variable aléatoire X suit une loi normale, et si on répète un grand nombre de fois la mesure de X, alors

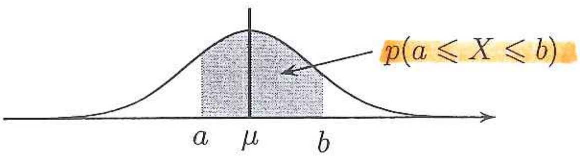
$\longrightarrow$ **un grand nombre de valeurs se situe autour de l'espérance** μ,

$\longrightarrow$ **et on en trouve de moins en moins en s'éloignant de part et d'autre de l'espérance (la dispersion se mesure avec l'écart-type** σ**)**.

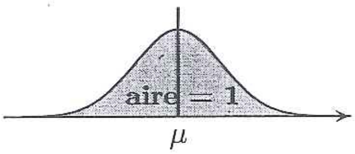
.2 Lien entre la courbe et les probabilités

PROPRIÉTÉS : Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale.

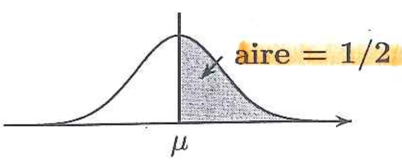
- $p(a \leqslant X \leqslant b)$ est l'aire du domaine coloré. (rappel : $p(a \leqslant X \leqslant b)$ se lit *"probabilité que X soit entre a et b".)*

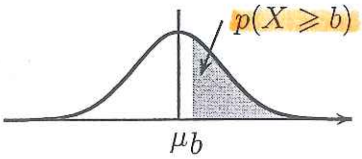


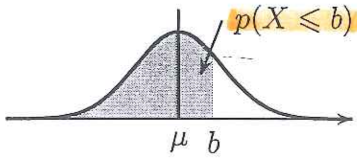
- **L'aire totale sous la courbe en cloche est égale à 1** et **la courbe admet un axe de symétrie.**



- De même, on a les correspondances suivantes entre les aires colorées et les probabilités :







- **TOUS LES RESULTATS des probabilités se trouvent avec la calculatrice :**

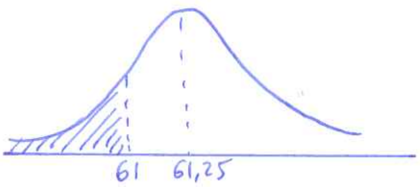
T.I	Casio
$\boxed{\text{2nd}}$ $\boxed{\text{DISTR}}$ $\boxed{\text{Normalcdf}}$ ou $\boxed{\text{NormalFreq}}$ Compléter les paramètres dans l'ordre : lower, upper, μ et σ.	$\boxed{\text{MENU}}$ $\boxed{\text{STAT}}$ $\boxed{\text{DIST}}$ $\boxed{\text{NORM}}$ $\boxed{\text{Ncd}}$ Compléter les paramètres : *lower*, *upper*, σ et μ

pour $p(a \leqslant X \leqslant b) \longrightarrow$ *lower* $= a$ et *upper*$= b$.
pour $p(X \leqslant k) \longrightarrow$ *lower* $=$ un nombre très petit, par exemple -4000 et *upper* $= k$
pour $p(X \geqslant k) \longrightarrow$ *lower* $= k$ et *upper* $=$ un nombre très grand, par exemple 4000

.3 Situation Concrète

Une PME fabrique des boules de billard. On note X la variable aléatoire qui, à chaque boule prélevée au hasard dans la production, associe son diamètre (en millimètres).
On suppose que X suit une loi normale d'espérance $61,25$ et d'écart-type $0,2$.

1. (a) Calculer à 10^{-4} près, la probabilité $p(X \leqslant 61)$.



$p(X \leq 61) = 0,1056$

Calculatrice :
lower : -4000
upper : 61
μ : $61,25$
$\sigma = 0,2$

   (b) Dans un lot de 200 boules de billard, à combien peut-on estimer le nombre de boules de diamètre inférieur à 61 millimètres ?

D'après le a), il y a environ 10,56 % des boules dont le dia

2. (a) Une boule est dite de « premier » choix si son diamètre (en millimètres) appartient à l'intervalle $[61; 61,5]$, sinon elle est dite « de second choix ». Calculer, à 10^{-4} près, la probabilité qu'une boule prélevée au hasard dans la production soit de premier choix.

$p(X \in [61\,;\,61,5]) \simeq 0,7887$

lower $= 61$
upper $: 61,5$
$\mu = 61,25$
$\sigma = 0,2$

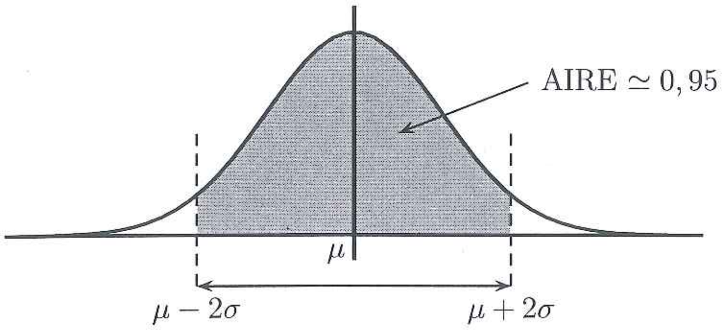
   (b) En déduire la probabilité qu'une boule prélevée au hasard dans la production soit de second choix.

$p(\text{la boule est de second choix}) = 1 - p(\text{la boule est de 1}^{\text{er}}\text{ choix})$
$= 1 - 0,7887$
$= 0,2113$

.4 Où se situent 95 % des valeurs de X pour une loi normale ?

Pour une loi normale, on a la propriété suivante (*qui peut s'exprimer de 3 manières :*)

> Environ 95% des valeurs prises par X sont entre $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$.
>
> La probabilité de l'événement "$X \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$" vaut environ 0,95.
>
> $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0,95$



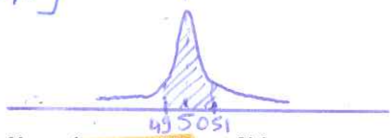
Exemples d'utilisation :

1. Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 50 et d'écart-type 0,5. Donner sans utiliser la calculatrice un intervalle qui contient environ 95% des valeurs prises par X.

On sait que l'intervalle $[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]$ contient environ 95% des valeurs

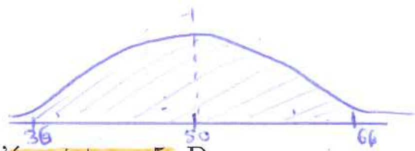
Donc ici c'est l'intervalle $[50 - 2\times 0,5 ; 50 + 2\times 0,5]$

soit $[49 ; 51]$



2. Même question pour une variable aléatoire X suivant une loi normale d'espérance 50 et d'écart-type 7.

$[\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma] = [50 - 2\times 7 ; 50 + 2\times 7] = [36 ; 64]$



3. Une variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance 100 et d'écart-type 5. Donner sans utiliser la calculatrice la probabilité que X soit dans l'intervalle $[90; 110]$.

$\mu - 2\sigma = 100 - 2\times 5 = 90$

$\mu + 2\sigma = 100 + 2\times 5 = 110$

donc comme on sait que

$p(X \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]) \simeq 0,95$

alors $p(X \in [90 ; 110]) \simeq 0,95$

(suite au dos)

4. Une usine fabrique des rondelles. Une rondelle est conforme quand son diamètre (en mm) appartient à l'intervalle $[89,6; 90,4]$. On sait que la probabilité qu'une rondelle prélevée au hasard soit conforme est 0,95.
   On note X la variable aléatoire qui mesure le diamètre d'un rondelle prise au hasard dans la production. X suit une loi normale d'espérance 90 et d'écart-type σ.
   Calculer la valeur de σ.

$p(X \in [89,6 ; 90,4]) \simeq 0,95$

on sait que $p(X \in [\mu - 2\sigma ; \mu + 2\sigma]) = 0,95$

alors $\begin{cases} \mu - 2\sigma = 89,6 \\ \mu + 2\sigma = 90,4 \end{cases}$. or $\mu = 90$ donc $\begin{cases} 90 - 2\sigma = 89,6 \\ 90 + 2\sigma = 90,4 \end{cases}$

on resoud et on trouve $\sigma = \frac{0,4}{2} = 0,2$

5. Vérifier tous les résultats précédents avec la calculatrice.

Verification du 1 : $p(X \in [49 ; 51]) \simeq 0,95$

avec lower $= 49$, upper $= 51$, $\mu = 50$, $\sigma = 0,5$

du 2 : $p(X \in [36 ; 64]) \simeq 0,95$

avec lower $= 36$, upper $= 64$, $\mu = 50$, $\sigma = 7$

du 3 : $p(X \in [90 ; 110]) \simeq 0,95$

avec lower $= 90$, upper $= 110$, $\mu = 100$, $\sigma = 5$

du 4 : $p(X \in [89,6 ; 90,4]) \simeq 0,95$

avec lower $= 89,6$, upper $= 90,4$, $\mu = 90$, $\sigma = 0,2$