EXERCICE 1 On considère la partie de $\mathbb{R}$ définie par $A = \left\{\frac{1}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Prouver que Inf($A$)=0.

- Prouvons d'abord que Inf(A) existe.
  A contient 1 donc A est non vide, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} > 0$ donc A est minorée par 0. Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée admet une borne inférieure donc Inf(A) existe.

- 0 est un minorant de A et Inf(A) est le plus grand des minorants donc Inf(A)$\geqslant 0$. On pose m =inf(A), supposons que $m \neq 0$ alors $m > 0$.
  De plus $\mathbb{R}$ est archimédien donc $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall \epsilon > 0$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que $n\epsilon > x$.
  En particulier avec $x = 1$ et $\epsilon = m$, on obtient :
  $\exists n \in \mathbb{N}^*$ tel que $nm > 1 \Leftrightarrow m > \frac{1}{n}$. Or $\frac{1}{n} \in A$ donc la dernière inégalité est en contradiction avec la définition de la borne inférieure.
  On a donc Inf(A)=0.

EXERCICE 2 On considère la partie de $\mathbb{R}$ définie par $B = \left\{\frac{p}{p+q}; p \in \mathbb{N}; q \in \mathbb{N}^*\right\}$. Prouver que Sup($B$)=1.

- Prouvons d'abord que Sup(B) existe.
  B contient 0 donc B est non vide, pour tout $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, $\frac{p}{p+q} < 1$ donc B est majorée par 1. Toute partie de $\mathbb{R}$ non vide et majorée admet une borne supérieure donc Sup(B) existe.

- 1 est un majorant de B et Sup(B) est le plus petit des majorants donc Sup(B)$\leqslant 1$.

  On fixe la valeur de q et on pose $f(p) = \frac{p}{p+q}$. On fait tendre p vers $+\infty$. On obtient donc : $\lim\limits_{p\to+\infty} \frac{p}{p+q} = 1$ (q entier non nul fixé)
  On utilise la définition d'une limite finie vue en classe de terminale : Tout intervalle ouvert centré sur 1 contient, pour p suffisant grand, toutes les valeurs de $f(p)$.
  Ceci se traduit par : $\forall \epsilon > 0, \exists p_0 > 0$ tel que $(p \geqslant p_0 \Rightarrow f(p) \in]1-\epsilon; 1+\epsilon[) \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists p_0 > 0$ tel que $(p \geqslant p_0 \Rightarrow 1-\epsilon < f(p) < 1+\epsilon)$

  Finalement, $\forall \epsilon > 0$, il existe p_0 tel que $p > p_0 \Longrightarrow 1 - \epsilon < \frac{p}{p+q} \leqslant 1$, on reconnaît la propriété caractéristique de la borne supérieure donc Sup(B)=1. En effet, $\frac{p}{p+q}$ est un élément de la partie B « coincé » entre $1-\epsilon$ et 1, pour tout $\epsilon > 0$.

  OU

  Autre méthode pour obtenir la double-inégalité caractéristique du Sup.
  $\mathbb{R}$ est archimédien donc $\forall \epsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n\epsilon > 1$ (on prend $x = 1$ dans la propriété puisque elle est vraie pour tout x). Comme $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = p+1$, et $n\epsilon > 1 \Leftrightarrow (p+1)\epsilon > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{p+1} < \epsilon$ $\Leftrightarrow -\frac{1}{p+1} > -\epsilon \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{p+1} > 1-\epsilon \Leftrightarrow \frac{p}{p+1} > 1-\epsilon$. Comme par ailleurs, $\frac{p}{p+1} \leqslant 1$, on a donc l'existence de $p \in \mathbb{N}$ tel que :
  $$\forall \epsilon > 0,\ 1-\epsilon < \frac{p}{p+1} \leqslant 1$$
  Il existe donc $\frac{p}{p+1}$, élément de B, vérifiant la double-inégalité précédente donc Sup(B)=1.

EXERCICE 3 Soit $r \in \mathbb{Q}^*$. Prouver que les nombres $\sqrt{5}$, $r+\sqrt{5}$ et $r\sqrt{5}$ sont irrationnels.

- Supposons que $\sqrt{5}$ est rationnel alors il existe $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Z}^*$, premiers entre eux, tels que $\sqrt{5} = \frac{p}{q}$ ($\bigstar$).

$(\bigstar) \Rightarrow 5 = \dfrac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = 5q^2\,(1) \Rightarrow p^2 \in 5\mathbb{N}$ (p^2 multiple de 5).
Or si p n'est pas un multiple de 5 alors p^2 non plus (utiliser les congruences modulo 5 pour s'en convaincre).
Ainsi p est donc un multiple de 5, si bien qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = 5k$. On reporte dans la relation (1),

$$p^2 = 5q^2 \text{ et } p = 5k \Leftrightarrow (5k)^2 = 5q^2 \Leftrightarrow 5k^2 = q^2 \Rightarrow q^2 \in 5\mathbb{N} \Rightarrow q \text{ multiple de 5.}$$

p et q étant des multiples de 5, cela contredit l'hypothèse p et q premiers entre eux donc la supposition n'est pas valable et $\sqrt{5}$ n'est pas un rationnel, il est irrationnel.

- Supposons $r + \sqrt{5}$ rationnel, c'est à dire que $r + \sqrt{5} = r_1$ où $r_1 \in \mathbb{Q}$. Ce qui s'écrit encore $\sqrt{5} = r_1 - r$. Or la différence de deux rationnels est un rationnel, donc $r_1 - r \in \mathbb{Q}$. Contradiction avec le fait que $\sqrt{5}$ est irrationnel. Ainsi $r + \sqrt{5}$ est irrationnel.

- $r\sqrt{5}$ est irrationnel : Même raisonnement avec le quotient de deux rationnels qui est un rationnel.