I Vocabulaire des probabilités (vu en seconde)

I.1 Univers

- **Expérience aléatoire** : C'est une expérience qui a plusieurs issues possibles et l'on ne peut pas prévoir avec certitude quel sera le résultat. Elle est liée au hasard.

- **Univers** Ω : C'est l'ensemble de toutes les issues d'une expérience aléatoire.
  on note $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$

- **Événement** : C'est un résultat composé d'une ou plusieurs issues d'une expérience aléatoire. C'est une partie de l'univers Ω.

Exemple 1 :

- On lance un dé* et on regarde le numéro de la face obtenue :
$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$
- On lance un dé* et on regarde si le numéro de la face obtenue est pair ou impair : $\Omega = \{P, I\}$
- On lance une pièce de monnaie* : $\Omega = \{P, F\}$
- On lance deux pièces de monnaie* : $\Omega = \{\ldots\ldots\ldots\ldots\}$
- On lance deux dés* : $\Omega = \{(i, j),\ 1 \leqslant i, j \leqslant 6\}$

* : équilibré(e)(s) ou pas

I.2 Loi de probabilité

Définir une loi de probabilité P sur Ω, c'est associer à chaque issue x_i un nombre p_i positif ou nul vérifiant $0 \leqslant p_i \leqslant 1$ tel que :

$$p_1 + p_2 + \ldots\ldots + p_n = 1 \text{ où } n \text{ est le nombre d'issues de l'univers.}$$

p_i est appelée probabilité de l'issue x_i et cela se note : $P(x_i) = p_i$.

$$\begin{aligned} P : \Omega &\longrightarrow [0; 1] \\ x_i &\longmapsto P(x_i) = p_i \end{aligned}$$

Exemple 2 : Une urne comporte six boules : 3 rouges, 2 jaunes et 1 bleue. On prélève une boule et on note sa couleur. Quelle loi de probabilité est-il « raisonnable » d'associer à cette expérience ?

I.2.1 Un cas particulier : la loi equirépartie (uniforme)

Lorsque Ω est de **cardinal fini** (nombre d'éléments de Ω fini) et que l'on attribue la même probabilité à chaque issue, on dit que l'on choisit une probabilité P **équirépartie**, on a alors :

- pour toute issue x_i de Ω : $\boxed{P(x_i) = \dfrac{1}{card(\Omega)}}$
- pour tout événement A : $\boxed{P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)} = \dfrac{nombre\,d'éléments\,de\,A}{nombre\,d'éléments\,de\,\Omega}}$

On dit aussi, dans une telle situation qu'il y a **équiprobabilité**.

EXERCICE 1 :
Dans un jeu de 32 cartes, les cartes sont réparties en quatre catégories (coeur, carreau, trèfle, pique). Dans chaque catégorie, il y a huit cartes : As - Roi - Dame - Valet - 10 - 9 - 8 - 7.
On tire une carte au hasard.

1. Quelle est la probabilité de tirer une carte rouge ?
2. Quelle est la probabilité de tirer un roi ?
3. Quelle est la probabilité de tirer une sept noir ?

I.3 Calculs de probabilités

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire et P une loi de probabilité qui modélise l'expérience.

I.3.1 Probabilité d'un événement

La probabilité d'un **événement** A est la **somme** de toutes les probabilités des **issues appartenant** à A.

Exemple 3 : On lance un dé truqué tel que la probabilité de réalisation des faces soit proportionnelle au chiffre marqué sur la face.

1. Quelle loi de probabilité P est préconisée dans cette situation ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir un chiffre pair.

I.3.2 Événement contraire

L'événement contraire d'un événement A est composé des issues de l'univers qui ne sont pas dans A. On le note $\overline{A}$.

Sa probabilité se calcule de la manière suivante : $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$

Exemple 4 :
On lance à nouveau le dé truqué de l'exemple précédent et on relève la face obtenue.
A :« La face obtenue est au moins 2 » . Décrire $\overline{A}$ et calculer sa probabilité. En déduire $P(A)$.

I.3.3 Intersection et réunion d'événements

A et B sont deux événements constitués d'issues d'un univers Ω.

- L'**intersection** de A et de B est l'événement noté $\boxed{A \cap B}$ formé des issues communes à l'événement A **et** à l'événement B.
- La **réunion** de A et de B est l'événement noté $\boxed{A \cup B}$ formé des issues constituant l'événement A **ou** l'événement B.

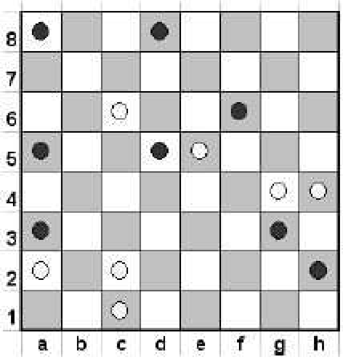
Exemple 5 On dispose d'une urne à l'intérieur de laquelle il y a 20 boules indiscernables au toucher numérotées de 1 à 20. On tire au hasard une boule. On considère l'événement A : « le numéro de la boule est divisible par 5 » et l'événement B : « le numéro de la boule est un chiffre. » Décrire les événements $A \cap B$ et $A \cup B$. Calculer leur probabilité.

P R O P R I É T É S : Soit A et B deux événements, $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (\bigstar)}$.

Certaines situations conduisent à $P(A \cap B) = 0$, on dit alors que les événements A et B sont **incompatibles** et

$$(\bigstar) \text{ devient } P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

EXERCICE 2 :

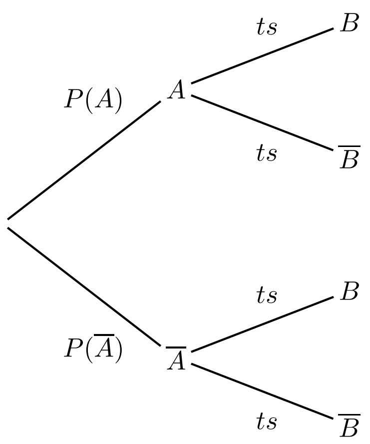


L'échiquier ci-contre est formée de rangées (lignes ou colonnes) repérées par un entier de 1 à 8 ou une lettre de a à h. Sur cet échiquier sont placés des pions blancs et des pions noirs. On choisit au hasard une rangée et on s'intéresse aux événements : A : « la rangée comporte au moins deux pions » et B : « il y a au moins un pion noir sur la rangée » .

1. Quelle est la probabilité de A, de B, de $A \cap B$?
2. Quelle est la probabilité de l'événement $A \cup B$?
3. Définir les événements contraires des événements A et B. Calculer $p(\overline{A})$ et $p(\overline{B})$.

I.4 Arbre de probabilités

A et B deux événements.



Règles et calculs sur un arbre de probabilités :

- À chaque « nœud » figure une issue (ou événement).
- On indique au dessus de chaque branche qui y conduit sa probabilité.
- La somme des probabilités de toutes les branches partant d'un même noeud est égale à 1.
- L'événement intersection est le résultat d'un chemin possible sur l'arbre et sa probabilité est le **produit** des probabilités figurant sur chaque branche parcourue.
- La probabilité de l'événement $B = \{A \cap B; \overline{A} \cap B\}$ se calcule en ajoutant les probabilités $P(A \cap B)$ et $P(\overline{A} \cap B)$: on fait donc la somme des produits de probabilités résultant du « passage » sur les chemins conduisant à B.

Exemple 6 Dans une région imaginaire, les météorologistes ont constaté, suite à un nombre de relevés, que :

- si le temps est sec (S) un jour, il y a cinq chances sur six qu'il soit sec le lendemain ;
- si le temps est humide (H) un jour, il y a deux chances sur trois qu'il soit humide le lendemain ;

  On est dimanche et le temps est sec. Dessiner un arbre pondéré distinguant les possibilités de temps le mardi et calculer la probabilité de l'événement S_{ma} : « Le temps est sec le mardi. »

II Variables aléatoires

Soit Ω un univers associé à une expérience aléatoire et P une loi de probabilité qui modélise l'expérience.

II.1 Notion de variable aléatoire

Une **variable aléatoire discrète** définie sur Ω est une application qui, à chaque issue de Ω, associe un nombre réel. On la note X.

$$\begin{aligned} X : \Omega &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x_i &\longmapsto X(x_i) = v_i \end{aligned}$$

L'ensemble des valeurs prises par la variable X est noté $X(\Omega) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$

Notation : Lorsque x désigne un nombre réel, l'événement « X prend la valeur x » est noté $(X = x)$.

Exemple 7 Un jeu de hasard consiste à lancer un dé équilibré à 6 faces. Le lanceur gagne la somme double de la valeur de la face obtenue si celle-ci est paire, sinon, il perd le double de la valeur indiquée par le dé.
On appelle X le gain, positif ou négatif, du joueur après un lancer.

- Ici, l'ensemble des issues possibles est $\Omega = \{$ .... $\}$,
- on a défini avec X une variable aléatoire réelle telle que :
  ....
  .

II.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire prenant les valeurs $v_1, v_2, ..., v_n$.

> Lorsqu'à chaque valeur v_i de $X(\Omega)$ (avec $1 \leq i \leq n$) prise par une variable aléatoire X, on associe la probabilité p_i de l'événement $(X = v_i)$, on dit que l'on définit la **loi de probabilité** de la variable aléaoire X.

Remarque 1 En général, on présente la loi d'une variable aléatoire X sous la forme d'un tableau, qui récapitule les valeurs prises par X ainsi que les probabilités associées :

Valeurs de X : v_i	v_1	v_2	v_3	...	v_n
Probabilité : $p(X = v_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

Exemple 8 On reprend l'énoncé de l'exemple précédent. La loi de X est donnée par :

v_i	-10	-6	-2	4	8	12
$p(X = v_i)$						

Remarque 2 On note que pour chacun de ces tableaux, la somme des probabilités élémentaires fait 1

On écrit $\boxed{\sum_{i=1}^{n} p(X = v_i) = 1}$

II.3 Paramètres d'une loi de probabilité

II.3.1 Espérance

Soit X une variable aléatoire de loi :

Valeurs de X : v_i	v_1	v_2	v_3	...	v_n
Probabilité : $p(X = v_i)$	p_1	p_2	p_3	...	p_n

> On appelle **espérance** de la variable aléatoire X le réel noté $E(X)$ qui vaut :
>
> $$\boxed{E(X) = p_1v_1 + p_2v_2 + ... + p_nv_n = \sum_{i=1}^{n} p_iv_i.}$$

Remarque 3 Ce nombre représente la valeur moyenne de la variable aléatoire X.

- Si $E(X) > 0$, le jeu est **favorable** au joueur ;
- Si $E(X) < 0$, le jeu est **défavorable** ;
- Si $E(X) = 0$, le jeu est **équitable**.

Exemple 9 Avec l'exemple précédent, on trouve

II.3.2 Variance et écart-type

> ➤ On appelle **variance** de la variable aléatoire X le réel noté $V(X)$ qui vaut :
>
> $$\boxed{V(X) = p_1[v_1 - E(X)]^2 + p_2[v_2 - E(X)]^2 + ... + p_n[v_n - E(X)]^2 = \sum_{i=1}^{n} p_i[v_i - E(X)]^2.}$$
>
> ➤ On appelle **écart-type** de X le réel noté $\sigma(X)$ défini par :
>
> $$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.}$$

Exemple 10 Calcul de la variance pour l'exemple précédent :

- ➔ $V(X) =$ ....
- ➔ $V(X) =$ ....

D'où l'écart-type :

- ➔ $\sigma_x =$ ....

II.3.3 Propriétés

- ♦ La variance et l'écart-type d'une variable aléatoire réelle X sont des nombres positifs.
- ♦ L'écart-type mesure la dispersion des valeurs d'une variable aléatoire par rapport à son espérance.
- ♦ Si X est exprimé dans un certaine unité, σ_X l'est dans la même unité.

La propriété suivante permet un calcul plus rapide de la variance :

$$\boxed{V(X) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + ... + p_nx_n^2 - E^2(X) = \sum_{i=1}^{n}(p_ix_i^2) - E^2(X) = E(X^2) - E^2(X).}$$

Soient a et b deux réels, on a :

$$\boxed{E(aX+b) = aE(X)+b} \qquad \boxed{V(aX+b) = a^2V(X)} \qquad \boxed{\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)}$$

II.4 Un exercice

On tire simultanément 2 boules. On suppose que les tirages sont équiprobables.

1. Une urne U_1 contient 2 boules numérotées 1 et 3 boules numérotées 2.

   - Déterminer les probabilités des événements suivants :
     A : « Tirer 2 boules numérotées 1 ».
     B : « Tirer 2 boules numérotées 2 ».
     C : « Tirer une boule numérotée 1 et une boule numérotée 2 ».

   - Le total des valeurs des 2 boules définit une variable aléatoire X. Déterminer la loi de probabilité de X, calculer son espérance et son écart-type.
2. Une urne U_2 contient 2 boules numérotées 4 et 3 boules numérotées 8. Le total des 2 boules définit une variable aléatoire Y. Déterminer $E(Y)$, puis $\sigma(Y)$.
3. Une urne U_3 contient 2 boules numérotées 5 et 3 boules numérotées 6. Le total des valeurs des 2 boules définit une variable aléatoire Z. Déterminer $E(Z)$ puis $\sigma(Z)$.
4. Mêmes questions pour un tirage avec remise

III Répétition d'expériences identiques et indépendantes

III.1 Définition

Il y a répétition d'expériences identiques lorsque la même expérience aléatoire est répétée plusieurs fois de suite.
Ces expériences aléatoires successives sont indépendantes lorsque l'issue de l'une quelconque de ces expériences « ne dépend pas » (précision en *ts*) de l'issue des autres expériences.

Exemple 11 On lance 3 fois de suite un dé équilibré . Le numéro obtenu lors d'un lancer ne dépend pas du numéro obtenu aux 2 autres lancers
Par exemple, les listes $(4; 5; 3)$ et $(5; 3; 5)$ sont des issues de cette répétition

EXERCICE 3 Savoir-Faire 3 page 296 + 22,23 page 305

III.2 Épreuve de Bernoulli

Une épreuve de Bernoulli est une épreuve aléatoire ayant deux issues contraires de probabilités respectives p et q, avec $p+q=1$ (ainsi $q=1-p$).

Remarque 4 L'événement de probabilité p est souvent nommé S pour succès et celui de probabilité $q=1-p$ est nommé E pour échec .

Exemple 12 :

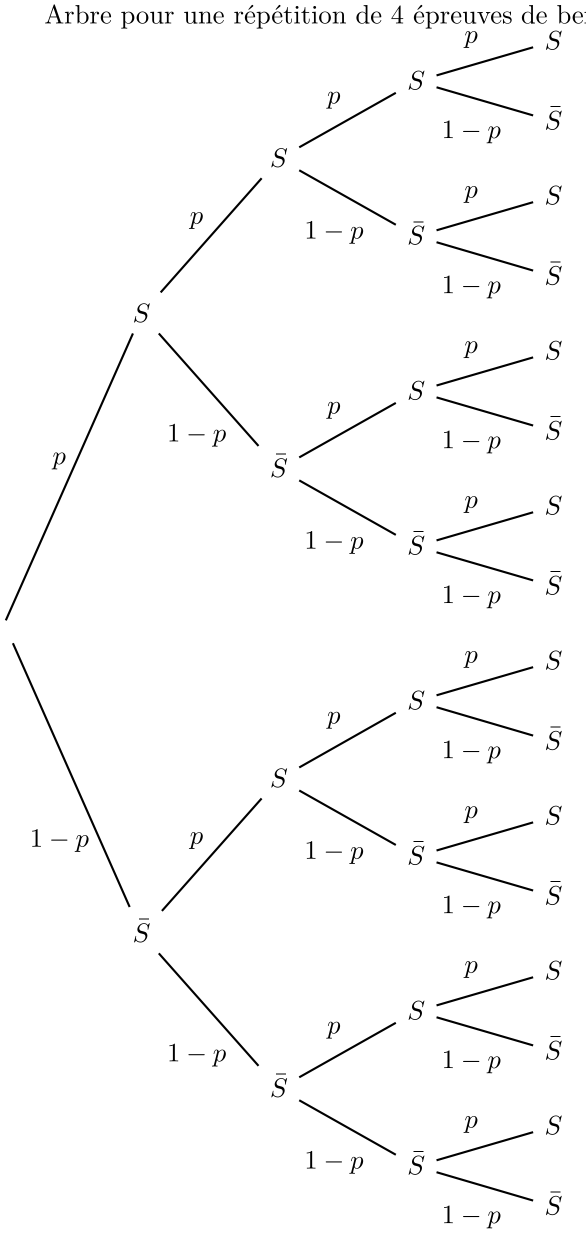
* Lancer d'une pièce équilibrée avec pour issues contraires PILE ($p=0.5$) et FACE ($q=0.5$)
* Tirage d'une boule dans une urne contenant 70 boules blanches et 30 boules vertes $\rightarrow S$: "tirer une boule blanche" ($p=0.7$) et $E=\overline{S}$: "tirer une boule verte" ($q=0.3$)

III.3 Loi Binomiale

Certaines situations en probabilité consistent en la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (schéma de Bernoulli). La variable aléatoire X à valeurs dans $\{0,1,...,n\}$ qui compte le "nombre de succès" (nombre de fois que S se réalise) suit **la loi binomiale de paramètres n et p.**

EXERCICE 4 :

Arbre pour une répétition de 4 épreuves de bernoulli indépendantes :



Une issue dans la situation ci-contre est par exemple :

$$S\bar{S}\bar{S}S \text{ ou } SSS\bar{S} \text{ ... etc}$$

Déterminer la loi de probabilité de la variable X qui compte les succès.

Remarque 5 : La loi binomiale de paramètres n et p est notée $\mathcal{B}(n, p)$.
La répétition des n épreuves de Bernoulli peut être décalée dans le temps ou simultanée dés que les événements sont indépendants.

> : Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.
>
> - Pour $k = 0, 1, ..., n$, la probabilité de l'événement $(X = k)$ est $\boxed{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k q^{n-k}}$.
>
>   (*En d'autres termes : la probabilité qu'il y ait k succès lors d'une répétition indépendantes de n épreuves indépendantes est égale à $\binom{n}{k}p^k q^{n-k}$*)
>
>   La **quantité** $\binom{n}{k}$ correspond au **nombre de chemins** dans un schéma de Bernoulli (**arbre à** n **étages**) passant par k succès. (*il s'obtient à la calculatrice*)
>
> - L'espérance et la variance de X sont $\boxed{E(X) = np}$ et $\boxed{V(X) = npq}$.

Remarque 6 : La probabilité **d'obtenir au moins un succès** est calculée par :

$$p(X \geqslant 1) \text{ soit } 1 - p(X = 0) = 1 - q^n$$

Exemple 13 Un Q.C.M comporte 10 questions offrant chacune 3 réponses possibles. On répond complétement au hasard. Quelles sont les probabilités :

* d'obtenir 2 réponses exactes ?
* d'avoir la "moyenne" (5 réponses ou plus exactes) ?

EXERCICE 5 Savoir-Faire 2 p 323. 15,17 p 333.

IV Échantillonnage

Dans ce paragraphe, les termes « population », « caractère » définis dans la leçon 6 sont connus.

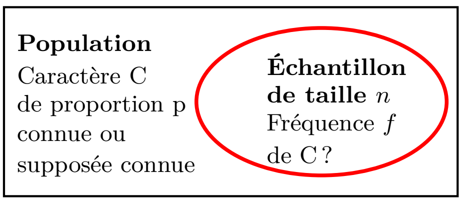
IV.1 Échantillon

> Un échantillon de taille n est obtenu en prélevant au hasard, **successivement et avec remise**, n éléments d'une population.

Remarque 7 Lire livre page 318.

IV.2 Intervalle de fluctuation

Contexte : Dans une certaine population, la proportion d'individus présentant le caractère C est p.
Que peut-on dire de la fréquence f de C sur un échantillon aléatoire de taille n ?



Exemple 14 L'urne avec les boules rouges dans le livre page 318.

> Soit une population dont une proportion p des éléments admet un caractère donné.
> Dans un échantillon de taille n prélevé dans cette population, l'**effectif des éléments présentant ce caractère** est une variable aléatoire qui suit une **loi binomiale** de paramètres n et p.

Éléments de démonstration : Dès lors que l'effectif de la population est « assez » grand, prélever un échantillon de taille n peut être assimilé à un tirage successif avec remise. Il s'agit donc de répéter n tirages identiques à deux issues : avoir ou ne pas avoir le caractère choisi.

Exemple 15 Un paysagiste commande un lot de 10000 bulbes de tulipes jaunes (*Triomphe Bellona*) et de tulipes rouges (*Darwin hybride*). Le fournisseur garantit une composition de 60% de tulipes jaunes. Le paysagiste plante 256 de ces bulbes. Il obtient 132 tulipes jaunes. Il souhaite savoir si l'affirmation du fournisseur doit être remise en question.

1. (a) Déterminer l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% (vu en classe de seconde) de la fréquence de tulipes jaunes dans un échantillonde de taille 256.
   (b) Que penser de l'affirmation du fournisseur ?
2. On suppose que la proportion de tulipes jaunes chez le fournisseur est réellement de $p = 0,60$.
   On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de bulbes jaunes dans un échantillon de 256 bulbes.
   (a) Expliquer pourquoi le tirage d'un échantillon de 256 bulbes dans le lot peut être assimilé à un schéma de Bernoulli.
   (b) En déduire la loi suivie par la variable X si l'on fait cette assimilation.
3. (a) Déterminer à l'aide de la calculatrice le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$ et le plus petit entier b tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.
   (b) En déduire que $P(a \leqslant X \leqslant b) \geqslant 0,95$.
   (c) Expliquer pourquoi l'intervalle $\left[\frac{a}{256}; \frac{b}{256}\right]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence de bulbes jaunes dans un échantillon de taille 256.
   (d) Que penser de l'affirmation du fournisseur ?

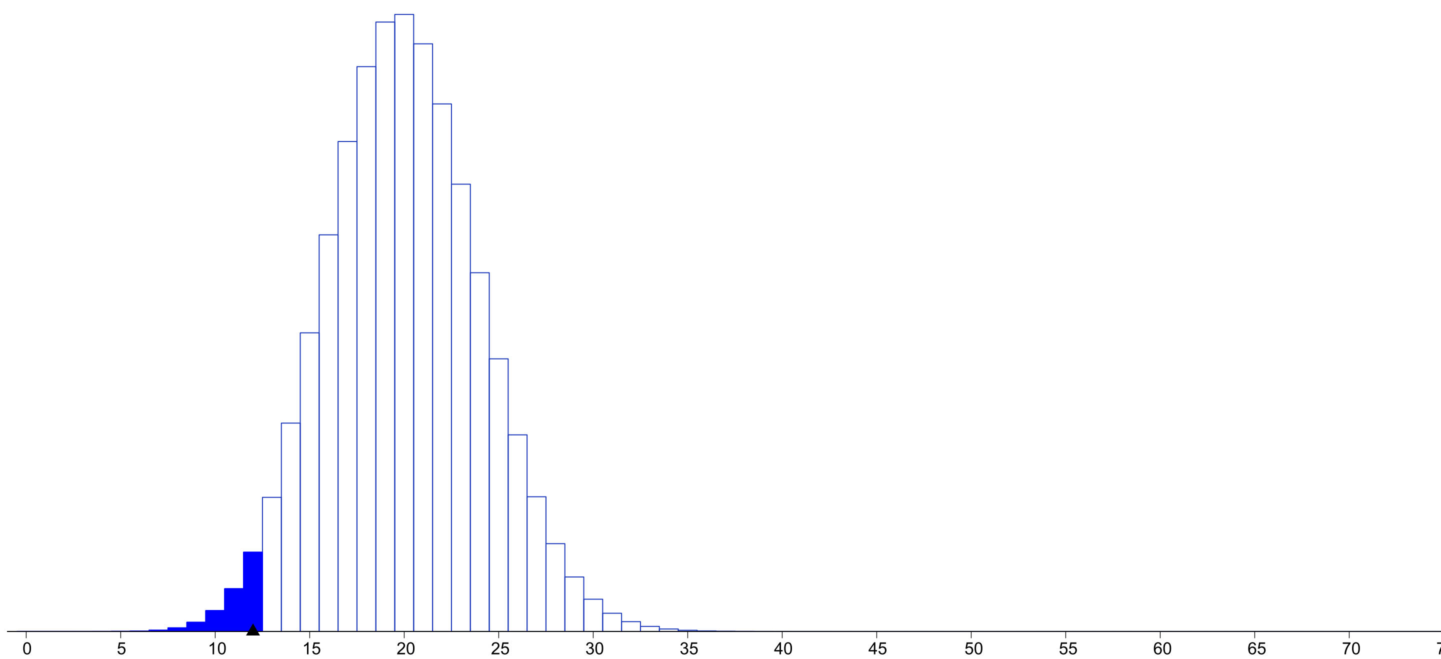
> X est la variable aléatoire égale aux effectifs des éléments des échantillons ayant le caractère donné.
> **L'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence observée** est l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ où a est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant a) > 0,025$ et b est le plus petit entier tel que $P(X \leqslant b) \geqslant 0,975$.

Remarque 8 :

- L'intervalle $[a; b]$ est appelé intervalle de fluctuation au seuil de 95% de l'effectif.
- La probabilité pour que la fréquence d'un échantillon de taille n, pris parmi tous les échantillons de taille n, soit dans l'intervalle $\left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n}\right]$ est environ $0,95$.

Exemple 16 Livre page 319.

EXERCICE 6 Exercice 28 page 335.



Sous certaines conditions ($n \geqslant 30$, p compris entre 0,2 et 0,8), l'intervalle $\left[p - \dfrac{1}{\sqrt{n}} ; p + \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right]$ est une bonne approximation de l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% de la fréquence observée du caractère. (*vu en seconde*)

Exemple 17 Calculer l'IFA de seconde pour l'exercice 6 (28 p 335).

IV.3 Prise de décision à partir d'un échantillon

Règle de Décision :

On considère une population dans laquelle **on fait l'hypothèse que la proportion d'un certain caractère est** p. On souhaite tester la validité de cette hypothèse.

Pour cela, on prélève au hasard et avec remise un échantillon de taille n sur lequel on observe la **fréquence** f **d'apparition de ce caractère**, puis on détermine I_n l'intervalle de fluctuation au seuil de 95% correspondant.

- Si $f \notin I_n$, on rejette l'hypothèse avec un risque d'erreur de 5%.
- Sinon, on ne la rejette pas.

Remarque 9 Il est naturel que f et p n'est pas la même valeur. La question est de savoir si cette différence est significative ou non. L'intervalle I_n contient plus de 95% des fréquences des échantillons de taille n.

Exemple 18 La direction d'une grosse société estime que 54% des salariés qui déjeunent sur place sont satisfaits du restaurant d'entreprise. Afin de vérifier cette hypothèse, une enquête auprès de 50 salariés est organisée. 21 salariés déclarent que la restauration leur convient.

Que penser de l'affirmation de la direction ?

V Annexe : Coefficients binomiaux

V.1 Définition

Soit n un entier naturel non nul. Soit k un entier compris entre 0 et n.
Le nombre $\dbinom{n}{k}$ (lu « k parmi n ») est le nombre de chemins menant à k succès dans un schéma de BERNOULLI lors des n répétitions.
Par convention, on pose $\dbinom{0}{0} = 1$. Les nombres $\dbinom{n}{k}$ sont appelés **coefficients binomiaux**.

Remarque 10 $\dbinom{n}{k}$ est plus généralement le nombre de « parties » à k éléments distincts que l'on peut former dans un ensemble à n éléments.

Propriétés des coefficients binomiaux :

- Des cas particuliers : $\dbinom{n}{1} = n$, puis $\dbinom{n}{0} = 1$ et $\dbinom{n}{n} = 1$;
- $\dbinom{n}{n-k} = \dbinom{n}{k}$;
- $\dbinom{n+1}{k+1} = \dbinom{n}{k} + \dbinom{n}{k+1}$