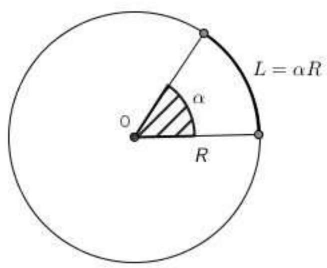
I Une nouvelle unité d'angle : le radian

Le radian est une unité de mesure des angles choisie de façon que l'angle plat de $\boxed{\text{180 degrés}}$ ait une mesure de $\boxed{\pi \text{ radians}}$.

Ainsi, un arc de cercle de rayon R et d'angle α en radians a pour longueur $L = \alpha R$.



Le tableau de proportionnalité ci-dessous permet de convertir un angle de x degrés en un angle de α radians et inversement

degrés	180	x
radians	π	α

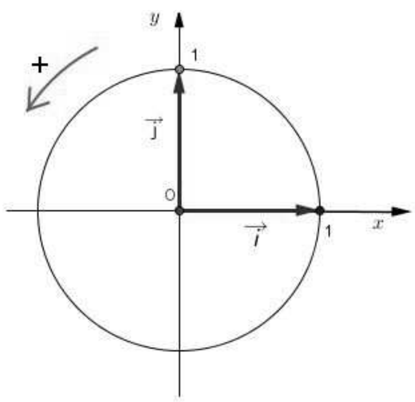
Exemple 1 Convertir en radians les mesures d'angles usuelles 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 150°, 360°. À quelle mesure en degrés correspond $\frac{5\pi}{9}$ rad, $\frac{5\pi}{6}$ rad, $\frac{\pi}{8}$ rad ?

Remarque 1 Si $R = 1$, l'unité radian permet d'exprimer un angle au centre avec le même nombre que celui utilisé pour la longueur de l'arc associé.
Également, 1 radian est la mesure de l'angle au centre qui intercepte un arc de longueur 1. (toujours si $R = 1$)

EXERCICE 1 Exercices 1 et 4 page 257 ;

II Correspondance entre nombres réels et point du cercle trigonométrique

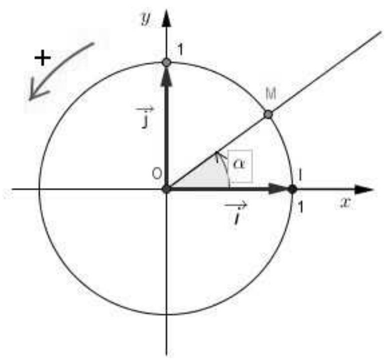
II.1 Cercle trigonométrique



Dans le plan **muni** d'un repère $(O; I; J)$ et **orienté** (parcouru dans le sens inverse des aiguilles d'une montre), le **cercle trigonométrique** est le cercle de centre 0 et de rayon 1.

Remarque 2 Le sens inverse des aiguilles d'une montre s'appelle le **sens trigonométrique** ou **sens direct**.

II.2 Plusieurs mesures d'angle pour un point du cercle



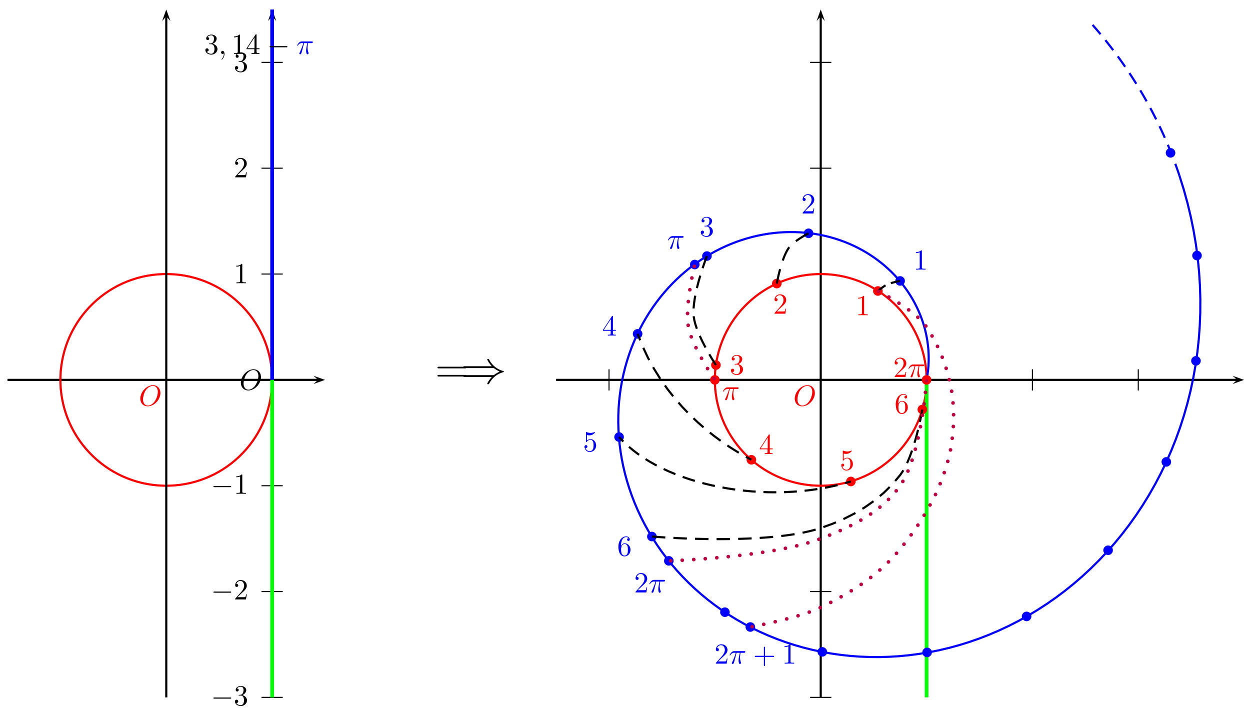
À un point M du cercle trigonométrique, on peut faire correspondre une valeur α de mesure d'angle (positive ou négative) permettant de le positionner sur le cercle trigonométrique.

Propriété : Si α permet de repérer un point M sur le cercle trigonométrique, alors $\alpha - 2\pi$, $\alpha + 2\pi$, plus généralement $\alpha + k \times 2\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) donnera le même point sur le cercle trigonométrique.

Exemple 2 Positionner sur le cercle trigonométrique un point A « image » de la mesure $-\dfrac{15\pi}{4}$.

Pour se convaincre de tout ceci, on enroule la droite des réels sur le cercle trigonométrique :

Remarque 3 :
- Le périmètre du cercle trigonométrique vaut $2\pi \times R = 2\pi$.
- On « colle » l'origine 0 de la droite des réels sur le point I de coordonnées $(1;0)$ et on enroule.



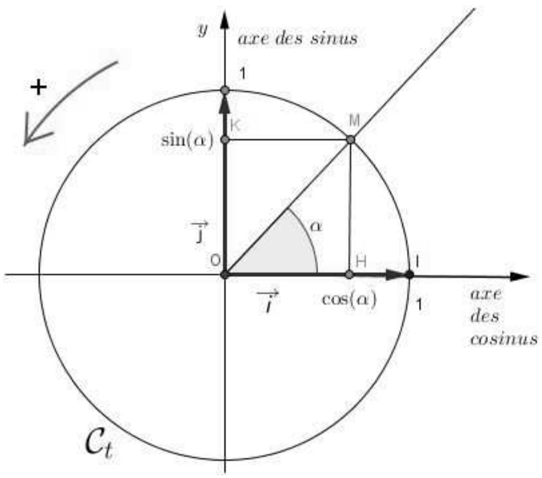
En résumé :
- À tout nombre réel x de la droite des réels correspond un point M sur le cercle trigonométrique et donc un angle au centre $\widehat{OIM}$ exprimé en radians ;
- Inversement, à tout angle, c'est à dire tout point M du cercle trigonométrique, correspond une infinité de nombre réels qui ont comme propriété d'être tous « distants » 2 à 2 d'un multiple de 2π.

On **privilégiera la mesure appartenant à** $]-\pi;\pi]$, **mesure appelée mesure principale.** (il en existe une seule !)

EXERCICE 2 Exercices 2,3 page 257 ; 19 p 265 ; 24,26 p 265

III Cosinus et Sinus

III.1 Cosinus et sinus d'un nombre réel



On considère le repère $(O; I; J)$.
Soit α un nombre réel et M le point de $\mathcal{C}_t$ tel qu'une mesure de $\widehat{OIM}$ soit égale à α.
L'abscisse et l'ordonnée du point M sont indiquées par les points H et K, projetés orthogonaux de M respectivement sur les deux axes.

- Le **cosinus du nombre réel** α est l'abscisse du point M ; cette valeur se note $\cos(\alpha)$.
- Le **sinus du nombre réel** α est l'ordonnée du point M ; cette valeur se note $\sin(\alpha)$.

Remarque 4 :

- Les coordonnées du point M sont alors $(\cos(\alpha), sin(\alpha))$.
- Si α et β sont deux mesures en radians d'un même angle , alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\beta = \alpha + k \times 2\pi$ (α et β différent d'un multiple de 2π). Les deux points $M(\alpha)$ et $N(\beta)$ sont donc confondus sur le cercle trigonométrique, ce qui permet d'écrire que,

  ▷ $\cos(\beta) = \cos(\alpha) \Leftrightarrow \cos(\alpha + k \times 2\pi) = \cos(\alpha)$
  ▷ $\sin(\beta) = \sin(\alpha) \Leftrightarrow \sin(\alpha + k \times 2\pi) = \sin(\alpha)$

III.2 Propriétés du cosinus et du sinus

Pour tout nombre réel α,

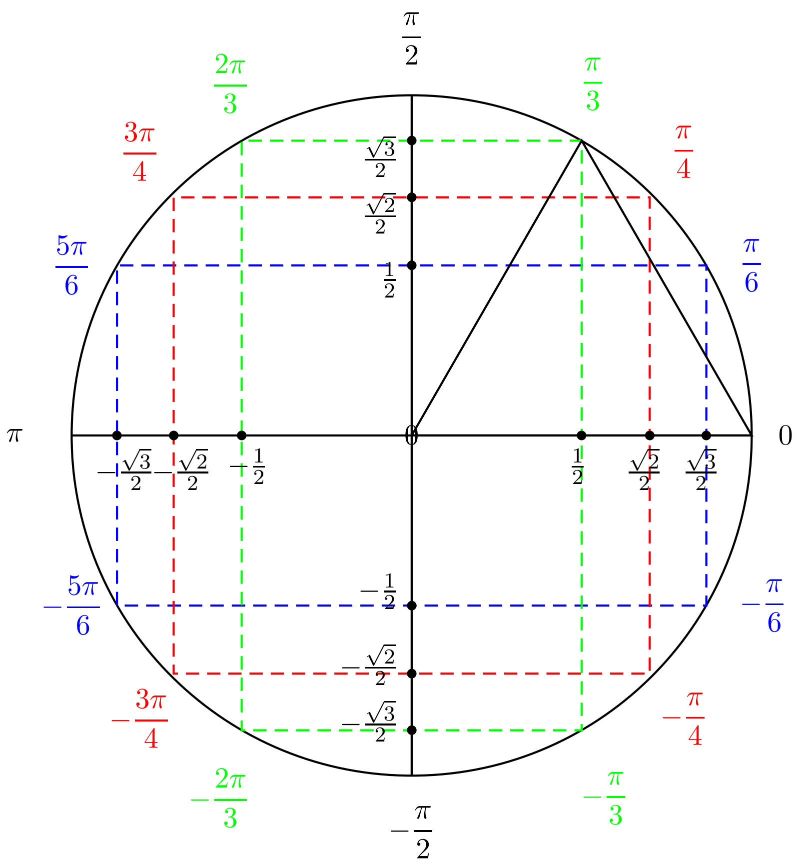
$$(\sin(\alpha))^2 + (\cos(\alpha))^2 = 1 \quad (1) \qquad -1 \leqslant \cos(\alpha) \leqslant 1 \quad (2) \qquad -1 \leqslant \sin(\alpha) \leqslant 1 \quad (3)$$

Remarque 5 On s'autorise une notation « allégée » pour le terme $(\cos(\alpha))^2$, on le remplace par $\cos^2 \alpha$. Réécrire la formule (1).

EXERCICE 3 Soit $x \in \mathbb{R}$ avec $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$ et $\cos(x) = \dfrac{1}{3}$. Calculer $\sin(x)$ et donner une valeur approchée de x à 10^{-2} près.
Donner une autre valeur de x, non comprise entre 0 et $\dfrac{\pi}{2}$, dont le cosinus vaut également $\dfrac{1}{3}$.

EXERCICE 4 Mise en œuvre p 261 + 27 p 266 + 68 p 270 + 72 p 271

III.3 Valeurs remarquables du cosinus et du sinus



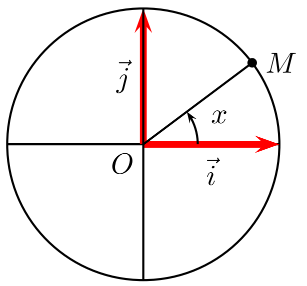
On résume ces valeurs (1^{er} quartier) dans un tableau

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1

Ces valeurs sont à connaître par coeur.

III.4 Cosinus et sinus d'angles associés

Soit M un point de $\mathcal{C}_t$. Soit x une mesure d'angle associée à M.



M_1, M_2, M_3 et M_4 sont les symétriques de M respectivement par rapport à l'axe des abscisses, l'origine, l'axe des ordonnées et la première bissectrice. Les placer sur le schéma ci-contre.

Donner une mesure pour les angles repérant M_1, M_2, M_3 et M_4, appelés angles associés.

Donner les coordonnées des points M_1, M_2, M_3 et M_4 en fonction de x.

EXERCICE 5 On sait que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

1. Calculer la valeur exacte de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (on pourra utiliser le fait que $4-2\sqrt{3} = (1-\sqrt{3})^2$) ;
2. Calculer les valeurs exactes des cosinus et sinus de $\frac{11\pi}{12}$ et de $-\frac{5\pi}{12}$.