I Étude des fonctions polynômes du second degré

I.1 Fonction polynôme du second degré

DÉFINITION : Une fonction **polynôme du second degré** est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ dont l'expression peut s'écrire $\boxed{f(x) = ax^2 + bx + c}$ avec a, b, et c des nombres réels donnés avec $a \neq 0$.

Exemple 1 :

- La fonction f du devoir 6 est une fonction polynôme du second degré. La fonction $g : x \longmapsto x^2$ est une fonction polynôme du second degré ($a = \ldots$; $b = \ldots$; $c = \ldots$), elle s'appelle la fonction ...., elle fera l'objet d'un paragrphe spécial dans cette leçon.

- La fonction $h : x \longmapsto 0.5x^2 - 3$ est également une fonction polynôme de degré deux.

- Qu'en est-il de $s : x \longmapsto -3(6x - 2x^3) + x^2 - 6x^3 + 1$? et de $v : x \longmapsto 2x^2\left(1 - \dfrac{1}{2x}\right) + 2$?

I.2 Représentation graphique

Dans un repère orthonormé (O, I, J), la courbe représentative d'une fonction f polynôme de degré 2 est une **parabole** de sommet S.

De plus :

- Si $\boxed{a > 0}$, la parabole C_f est « tournée vers le haut ». (le sommet S de la courbe correspond au point le plus « bas », l'ordonnée de S correspond au minimum de f)

- Si $\boxed{a < 0}$, la parabole C_f est « tournée vers le bas ». (le sommet S de la courbe correspond au point le plus « haut », l'ordonnée de S correspond au maximum de f)

Allures :

I.2.1 Coordonnées du sommet

f est une fonction polynôme du second degré.
La méthode pour déterminer les coordonnées $(x_S; y_S)$ de S repose sur le fait que la courbe de f admet un axe de symétrie. De ce fait, ilest possible de trouver dans la table de valeurs de f deux nombres x_1 et x_2 qui ont la même image.

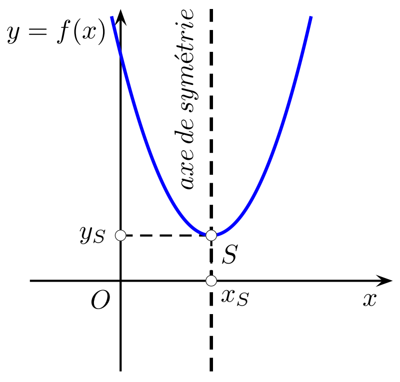


Table de valeurs

x	$f(x) = ax^2 + bx + c$
...	...
...	...
$\boxed{x_1}$	$\to \boxed{y}$
...	...
...	...
$\boxed{x_2}$	$\to \boxed{y}$
...	...
...	...

Pour déterminer : $x_S = \ldots\ldots$

$y_S = \ldots\ldots$

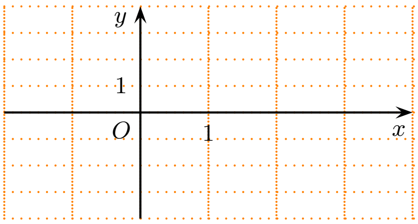
Les coordonnées du sommet peuvent également s'exprimer en fonction des coefficients a, b et c de l'expression de f.

$$\boxed{S\left(-\frac{b}{2a}\ ;\ f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)}$$

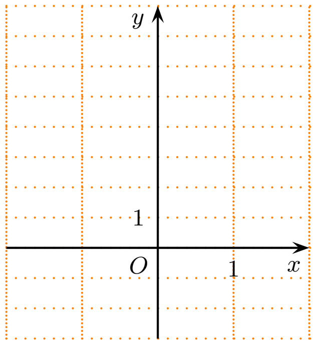
démonstration :

Exemple 2 :

$\boxed{f : x \longmapsto -x^2 + 3x + 1}$



$\boxed{g : x \longmapsto 2x^2 - x - 2}$



I.3 Variations d'une fonction polynôme de degré 2

Soit f une fonction polynôme de degré deux définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Si $a > 0$, f est **décroissante** sur $]-\infty; x_S]$ et **croissante** sur $[x_S; +\infty[$.
- Si $a < 0$, f est **croissante** sur $]-\infty; x_S]$ et **décroissante** sur $[x_S; +\infty[$.

$\boxed{a > 0}$

Tableau de variations de f :

$(a > 0)$ x	$-\infty$		x_S		$+\infty$
Variations de $x \mapsto ax^2 + bx + c$		$\searrow$	y_S	$\nearrow$	

$\boxed{a < 0}$

Tableau de variations de f :

$(a < 0)$ x	$-\infty$		x_S		$+\infty$
Variations de $x \mapsto ax^2 + bx + c$		$\nearrow$	y_S	$\searrow$	

Exemple 3 :
Dresser les tableaux de variations des deux fonctions polynômes de degré 2 suivantes :
$h(x) = 4x - 3x^2 + 1$ et $k(x) = \frac{2}{3}x^2 + x + \frac{4}{3}$
Donner les valeurs des extremums de h et de k.

I.4 Forme canonique d'une fonction polynôme de degré deux

Toute fonction polynôme de degré deux f admet une écriture de la forme $\boxed{a(x - x_S)^2 + y_S}$ appelée forme canonique de f.
$(x_S; y_S)$ étant toujours les coordonnées du sommet S de la parabole représentant f.

EXERCICE 1 :
Donner les formes canoniques des 4 fonctions des exemples 4 et 5.

Utilisation de la forme canonique : déterminer les variations d'une fonction, les extremums d'une fonction, savoir si la courbe de la fonction coupe l'axe des abscisses ...

En effet $f(x) = 0 \Leftrightarrow a(x - x_S)^2 + y_S = 0 \Leftrightarrow (x - x_S)^2 = -\frac{y_S}{a}$ (★). Si $y_S \neq 0$ et a sont de même signe la courbe ne peut couper l'axe des abscisses car la relation (★) est impossible.

II Étude de la fonction carré $x \longmapsto x^2$

II.1 La fonction carré

D É F I N I T I O N : La fonction carré est une fonction polynôme de degré deux particulière, elle est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\boxed{f : x \longmapsto x^2}$

Exemple 4 : Déterminer les images par la fonction carrée de 2, -3, $\sqrt{2}$ et $\dfrac{5}{4}$.

Résolution des équations du type $x^2 = a$, a réel donné.

- Si $a > 0$, l'équation admet ....
- Si $a = 0$, l'équation admet ....
- Si $a < 0$, l'équation ....

Exemple 5 : Déterminer les antécédents par la fonction carrée de 16, 0, 3 et -2.

II.2 Variations

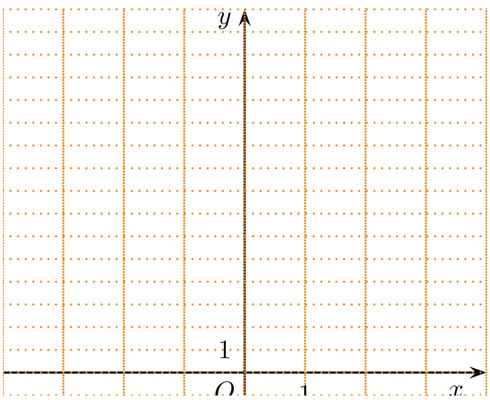
La fonction carré est **décroissante** sur $]-\infty; 0]$ et **croissante** sur $[0; +\infty[$.

x	
Variations de $x \longmapsto x^2$	

Démonstration : Prouvons que la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$.
Soit u et v deux nombres strictements positifs tels que $0 < u < v$.

II.3 Représentation graphique de la fonction carré : Parabole

La **parabole** qui représente la fonction carré admet l'**axe des ordonnées** comme **axe de symétrie**.



x	$-x$	x^2
-4	4	
-3	3	
-2	2	
-1.5	1.5	
-1	1	
-0.5	0.5	
0	0	

Conséquence des variations de la fonction carré.

- Si a et b sont **deux réels positifs** tels que $\boxed{a \leqslant b}$ alors $\boxed{a^2 \leqslant b^2}$
- Si a et b sont **deux réels négatifs** tels que $\boxed{a \leqslant b}$ alors $\boxed{a^2 \geqslant b^2}$

Le **carré conserve l'ordre de deux nombres positifs et renverse l'ordre de deux nombres négatifs**.

EXERCICE 2 : *Utilisation des propriétés sur l'ordre* Soit f le fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2(x-1)^2 + 3$. Prouver que f est croissante sur $[1; +\infty[$.

• ○ • ○ •

EXERCICE 3 : Sans calculer, comparer 2012^2 et 2013^2, $(-2012)^2$ et $(-2013)^2$.

• ○ • ○ •

EXERCICE 4 : *Utilisation du tableau de variations de la fonction carré.*

1. Dresser le tableau de variations de la fonction carrée sur $[-3; 4]$.
2. Compléter : si $-3 \leqslant x \leqslant 4$ alors ..... $\leqslant x^2 \leqslant$ .....

II.4 D'autres exercices

EXERCICE 5 :
Dans chaque cas, dire la parabole représentant la fonction est « tournée vers le bas » ou « tournée vers le haut ». Donner les coordonnées du sommet et tracer la parabole dans un repère orthogonal :

$$-(x+2)^2 - 3 \;\; ; \quad \frac{25}{2} + 2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \quad ; \quad -4(x-3,5)^2 + 1,5 \;\; ; \quad 7 + x^2$$

• ○ • ○ •

EXERCICE 6 :
Proposer une fenêtre adaptée pour visualiser la courbe de la fonction f sur l'intervalle I à l'écran de la calculatrice.

- $f(x) = (x+2)^2 - 16$ et $I = [-10; 10]$
- $f(x) = 8 - (x-12)^2$ et $I = [0; 20]$
- $f(x) = 0,58(x-100)^2 + 200$ et $I = [0; 200]$

• ○ • ○ •

EXERCICE 7 :
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \longmapsto 3(x-1)(x+5)$.

1. Prouver que f est une fonction polynôme du second degré.
2. Donner la forme canonique de f.
3. Choisir l'expression la mieux adaptée pour calculer les antécédents par f de 0 , -15 et de -27.
4. -30 a-t-il des antécédents par f ?
5. Dresser le tableau de variations de f. Quel est le minimum de f ? Pour quel x est-il atteint ?