EXERCICE 1 :

1. En utilisant les notations de la question 3., pour tout n, f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel, on obtient $f_n'(x) = 3x^2 + n$, ce qui implique que $f_n'(x) > 0$ pour tout x et tout n non nul (pour $n = 0$, $f'(0) = 0$ $f_0'(x) > 0$ pour x non nul) et la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   On a également $\lim\limits_{x \to -\infty} f_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x) = +\infty$.

   La fonction f_n réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, ce qui assure, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'existence d'un unique u_n solution de l'équation $f_n(x) = 0$.

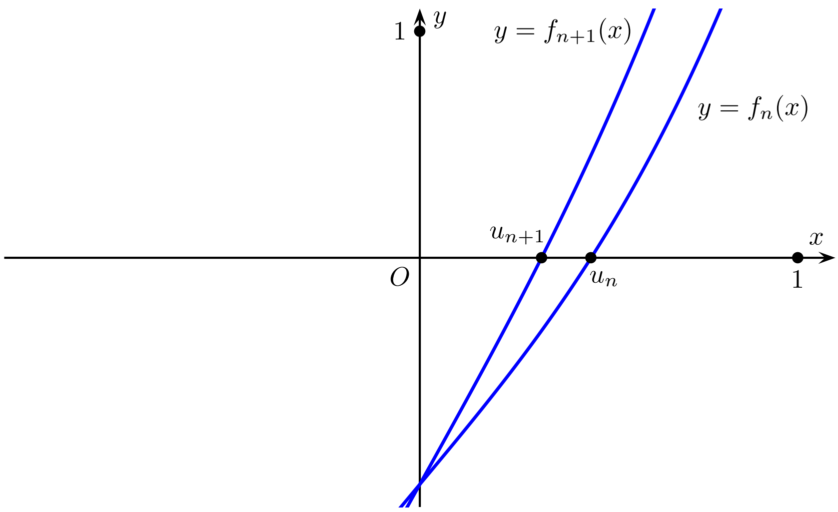
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = -1 < 0$ et $f_n(1) = n \geqslant 0$. On donc $0 < u_n \leqslant 1$.

3. Pour $x \in]0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) = x > 0$.

   $u_{n+1} \in]0, 1]$ donc, avec ce qui précède, $f_{n+1}(u_{n+1}) - f_n(u_{n+1}) = -f_n(u_{n+1}) > 0$. (on rappelle que $f_{n+1}(u_{n+1}) = 0$)
   Or $-f_n(u_{n+1}) = f_n(u_n) - f_n(u_{n+1})$, ce qui permet d'écrire que $f_n(u_n) > f_n(u_{n+1})$, et comme f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, on obtient

   $$u_{n+1} < u_n$$

   la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.



4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers une limite L comprise entre 0 et 1. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(u_n) = 0 \Leftrightarrow u_n^3 + nu_n - 1 = 0 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{1 - u_n^3}{n}$ et comme $u_n \in]0, 1]$, $\dfrac{1 - u_n^3}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

   On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ et par le théorème des gendarmes, on conclut que

   $$L = \lim_{n \to +\infty} u_n = 0$$

EXERCICE 2 :

1. La fonction $f : x \longmapsto \ln(1 + x) - x$ est dérivable sur $] - 1, +\infty[$ et

   $$\forall x \geqslant -1,\ f'(x) = \frac{1}{1 + x} - 1 = \frac{-x}{1 + x}$$

   Sur l'intervalle $] - 1, +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $-x$ car $1 + x > 0$. C'est à dire f est strictement croissante sur $] - 1, 0]$ et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ donc f atteint un maximum strict en 0 qui vaut $f(0) = 0$ donc, pour tout $x \geqslant -1$, $\ln(1 + x) - x \leqslant 0 \Leftrightarrow \ln(1 + x) \leqslant x$.

2. Pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^{*2}$, on a : $\left(\dfrac{m+n+1}{m+n}\right)^{m+n}=\left(1+\dfrac{1}{m+n}\right)^{m+n}=\mathrm{e}^{(m+n)\ln(1+\frac{1}{m+n})}$

   D'après 1., on peut écrire que $\ln\left(1+\dfrac{1}{m+n}\right)\leqslant\dfrac{1}{m+n}$, donc on obtient :
$$\forall(m,n)\in\mathbb{N}^{*2},\ \left(\frac{m+n+1}{m+n}\right)^{m+n}\leqslant\mathrm{e}$$
   A partir de là, si l'on trouve une suite d'éléments de A qui converge vers e, on pourra conclure que $\mathrm{e}=\sup(A)$.

   Soit $u_n=\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^{2n}=\mathrm{e}^{2n\ln(1+1/2n)}$, compte-tenu de $\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$, on peut écrire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}2n\ln\left(1+\frac{1}{2n}\right)=1$ et donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}u_n=\mathrm{e}$.
$$\text{Ainsi } \sup(A)=\mathrm{e}$$

EXERCICE 3 :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite 0 telle que $\underline{u_{n+1}+u_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{n}}$. On souhaite démontrer que $u_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2n}$.

1. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, $a_n=n(u_n+u_{n+1})$.
   (a) Comme $u_{n+1}+u_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$, on peut dire que $n(u_n+u_{n+1})$ converge vers 1 (caractérisation des équivalents) ainsi $(a_n)_{n\geqslant0}$ est convergente sa limite est 1.
   (b) Comme (u_n) est décroissante, $u_n>u_{n+1}$ pour tout n et
$$2u_{n+1}\leqslant u_n+u_{n+1}\leqslant 2u_n\Rightarrow 2nu_{n+1}\leqslant a_n\leqslant 2nu_n\ (\bigstar).$$
   Puis en multipliant par $n+1$ et divisant par $n+1$ la première partie de l'inégalité $(\bigstar)$,on obtient pour $n\geqslant1$,
$$2n\left(\frac{n+1}{n+1}\right)u_{n+1}\leqslant a_n\Leftrightarrow 2(n+1)u_{n+1}\leqslant\frac{n+1}{n}a_n$$
   écrite au rang $n-1$, pour $n\geqslant2$, l'inégalité devient $2nu_n\leqslant\dfrac{n}{n-1}a_{n-1}$, $(\divideontimes)$.

   grâce à $(\divideontimes)$ et $(\bigstar)$, on obtient, pour $n\geqslant2$, $a_n\leqslant 2nu_n\leqslant\dfrac{n}{n-1}a_{n-1}$.

   L'utilisation du théorème des gendarmes permet de conclure que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}2nu_n=1$ donc que $u_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2n}$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_n=\dfrac{1}{2n}+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. (u_n) vérifie-t-elle les conditions énoncées sur la suite (u_n) au début de l'exercice ?

   - Pour $n\geqslant2$, $\sqrt{n}<n<2n\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt{n}}>\dfrac{1}{n}>\dfrac{1}{2n}$. Ainsi pour n pair, $u_n>0$ et pour n impair, $u_n<0$. La suite n'est pas monotone.
   - Pour $n\geqslant1$, $u_{n+1}+u_n=\dfrac{1}{2n+2}+\dfrac{1}{2n}+(-1)^n\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}-\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=\dfrac{1}{2n+2}+\dfrac{1}{2n}+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$
     Or $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}\sqrt{n+1}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2n^{3/2}}$ qui est négligeable devant $\dfrac{1}{2n+2}+\dfrac{1}{2n}\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$ donc $u_{n+1}+u_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$.
   - De façon évidente, $u_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. On peut donc conclure que le fait que (u_n) soit décroissante est une condition nécessaire pour obtenir que $u_n\underset{+\infty}{\sim}\dfrac{1}{2n}$ dans le contexte de l'exercice.

EXERCICE 4 :

EXERCICE 5 :