La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$.

1. Calculs : $u_1 = 2, u_2 = 3, u_3 = 4$ et $u_4 = 5$. (les calculs sont laissés aux lecteurs)

2. D'après ce qui précéde, on conjecture que $u_n = n + 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Démonstration par récurrence : On pose $p_n : u_n = n + 1$

   - **Initialisation :** $u_0 = 1$ et $0 + 1 = 1$ donc p_0 est vraie.

   - **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie au rang k, c'est à dire que $u_k = k + 1$. ($k \in \mathbb{N}$) démontrons la propriété au rang $k + 1$.

     $u_{k+1} = 10u_k - 9k - 8 = 10(k + 1) - 9k - 8 = 10k + 10 - 9k - 8 = k + 2 = (k + 1) + 1$
     ce qui prouve que p_{k+1} est vraie.

   - **Conclusion :** D'après le principe du raisonnement par récurrence, p_n est vraie pour tout n et donc
     $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = n + 1}$$