Étudier les limites en $+\infty$ des fonctions :

- $g : x \longmapsto \dfrac{3+2x}{x^2-3}$;

  $\dfrac{3+2x}{x^2-3}$ se comporte en $+\infty$ comme $\dfrac{2x}{x^2} = \dfrac{2}{x} = 2 \times \dfrac{1}{x}$.

  En effet, la limite en $+\infty$ d'une fonction rationnelle est la même que celle obtenue comme le quotient des termes de plus haut degré.

  Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x} = 0$ par opération sur les limites.

  $$\text{On a donc } \lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$

- $h : x \longmapsto \dfrac{\sqrt{x}+2x}{1-5x}$;

  Attention la fonction h n'est pas une fonction rationnelle, la propriété du rapport des termes de plus nhaut degré ne s'applique pas. On décide donc de factoriser le terme « dominant » au numérateur et au dénominateur, il s'agit ici de x dans les deux cas :

  $$\text{Pour } x > 0,\ \frac{\sqrt{x}+2x}{1-5x} = \frac{x\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right)}{x\left(\frac{1}{x}-5\right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+2}{\frac{1}{x}-5}$$

  Par opérations sur les limites :

  $$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0 \text{ (R) donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 = 2 \\ \text{et} \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ (R) donc } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} - 5 = -5 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\textit{quotient}) \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}}+2}{\frac{1}{x}-5} = -\frac{2}{5} \end{array} \qquad \text{on a donc } \lim_{x\to+\infty} h(x) = -\frac{2}{5}$$

- $k : x \longmapsto \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$.

  Attention, k n'est pas une fonction polynôme, donc on ne peut pas appliquer la propriété du cours.

  On utilise la technique de la quantité conjuguée :

  Pour $x > 0$, $\sqrt{x} - \sqrt{x+1} = (\sqrt{x} - \sqrt{x+1}) \times \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \dfrac{x-(x+1)}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = \dfrac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}}$

  Le problème réside dans le terme $\sqrt{x+1}$.

  $$\left.\left.\left.\begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x+1 = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty \\ \text{et} \\ \displaystyle\lim_{y\to+\infty} \sqrt{y} = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\textit{composition}) \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\textit{somme}) \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x} = +\infty \\ \displaystyle\lim_{X\to+\infty} -\frac{1}{X} = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (\textit{composition}) \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+1}} = 0 \end{array}$$

  $$\text{On a donc } \lim_{x\to+\infty} k(x) = 0$$