g est la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{3x+\cos(x)}{x-1}$$

1. Pour tout nombre réel $x > 1$,

   $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1 \Leftrightarrow 3x-1 \leqslant 3x+\cos(x) \leqslant 3x+1$

   or comme $x > 1$, $x-1 > 0$, en divisant membre à membre dans l'encadrement ci-dessus, le sens est conservé. Ce qui donne :

$$\frac{3x-1}{x-1} \leqslant g(x) \leqslant \frac{3x+1}{x-1}$$

2. $g(x)$ vérifie l'encadrement ci-dessus pour $x > 1$, donc il est valable pour des « grandes » valeurs de x ($x \to +\infty$).
   $x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x-1}$ est une fonction rationnelle, donc sa limite en $+\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{x} = 3$$

   On prouve de même que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x-1} = 3$

   Toutes les conditions sont remplies pour utiliser le théorème des gendarmes :

$$\left.\begin{array}{l} \to \dfrac{3x-1}{x-1} \leqslant g(x) \leqslant \dfrac{3x+1}{x-1},\ x>1 \\ \to \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x-1}{x-1} = 3 \\ \to \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{3x+1}{x-1} = 3 \end{array}\right\} \underset{Th.Gendarmes}{\Longrightarrow} \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = 3}$$