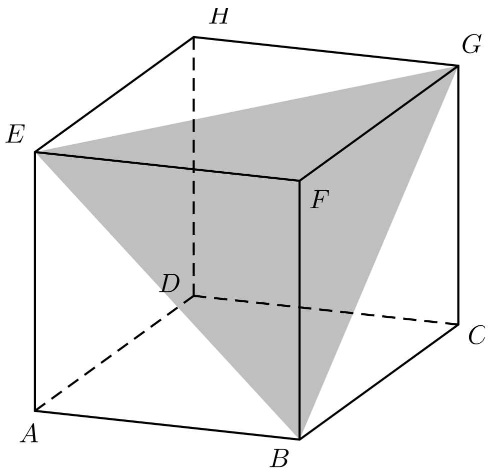
$ABCDEFGH$ est un cube de côté 1. On se place dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



Dans le repère considéré, les sommets du cube ont les coordonnées suivantes :

$$A(0,0,0)\ ,\ B(1,0,0)\ ,\ C(1,1,0)\ ,\ D(0,1,0)\ ,\ E(0,0,1)\ ,\ F(1,0,1)\ ,\ G(1,1,1) \text{ et } H(0,1,1).$$

1. $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DF}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

   Les produits scalaires suivants $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BE} = 0$ et $\overrightarrow{DF}.\overrightarrow{BG} = 0$ traduisent le fait qu'un vecteur directeur de la droite (DF) est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (BEG) non colinéaires. Ainsi la droite (DF) est orthogonale au plan (BEG).

2. $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal du plan (BEG) donc une équation cartésienne est de la forme

   $$x - y + z + d = 0$$

   Or, $B \in (BEG)$ donc $x_B - y_B + z_B + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$.

   Ainsi $\boxed{(BEG):\ x - y + z - 1 = 0}$

3. On nomme $\mathcal{P}$ le plan passant par F parallèle à (BEG). Il admet également le vecteur $\overrightarrow{DF}$ comme vecteur normal et donc

   $$\mathcal{P} : x - y + z + d = 0 \text{ et } F \in \mathcal{P} \Rightarrow d = -2$$
   $$\boxed{\mathcal{P} :\ x - y + z - 2 = 0}$$

   Le plan (ABC) admet le vecteur $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ comme vecteur normal et passe par $A(0,0,0)$ donc $\boxed{(ABC):\ z = 0}$.

   Les vecteurs $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{AE}$ des plans (BEG) et $\mathcal{P}$ n'étant pas colinéaires (à vérifier), les deux plans se coupent suivant une droite (d) définie de la manière suivante :

   $$(d)\left\{\begin{array}{l} z = 0 \\ x - y + z - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow (d)\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t - 2 \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array}\right.$$

   La droite cherchée a pour représentation paramétrique $\boxed{(d)\left\{\begin{array}{l} x = t \\ y = t - 2 \quad , t \in \mathbb{R} \\ z = 0 \end{array}\right.}$