Soit ϕ la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$\phi(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}+1$$

1. On admet que ϕ est dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$.

On peut écrire que $\phi = u\mathrm{e}^v + 1$ avec

$u : x \longmapsto 1+\dfrac{1}{x}$	$u' : x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$
$v : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$v' : x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$

et $\phi' = u'\mathrm{e}^v + u\ (\mathrm{e}^v)' = u'\mathrm{e}^v + u\ v'\mathrm{e}^v$

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } x \neq 0,\ \phi'(x) &= -\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{1/x} + \left(1+\frac{1}{x}\right)\times\left(-\frac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{1/x}\\ &= -\frac{1}{x^2}\left(1+1+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}\\ &= -\frac{1}{x^2}\left(2+\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}\\ &= -\frac{1}{x^2}\left(\frac{2x+1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}\\ &= -\left(\frac{2x+1}{x^3}\right)\mathrm{e}^{1/x}\end{aligned}$$

2. Signe de la dérivée $\phi'(x)$ et rassembler les résultats dans un tableau.

- $\forall x \neq 0$, $\mathrm{e}^{1/x} > 0$;
- Le signe de $\phi'(x)$ est donc celui de $-\dfrac{2x+1}{x^3}$; $2x+1$ s'annule en $-\dfrac{1}{2}$ et x^3 s'annule en 0. Compte-tenu de ce que l'on sait sur les fonctions de référence :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
x^3		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $\dfrac{2x+1}{x^3}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
Signe de $-\dfrac{2x+1}{x^3}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

3. En déduire les variations de ϕ et le signe de $\phi(x)$ sur $\mathbb{R}^*$. *(il faudra pour cela calculer des limites)*

Grâce à l'étude de signe de la question précédente, on peut réaliser le tableau de variations :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
Signe de $\phi'(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	
Variations de ϕ	2	$\searrow$	$1-\mathrm{e}^{-2}$	$\nearrow$	$1 \ \Vert\ +\infty$	$\searrow$	2

Calculs des limites :

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0\\ \displaystyle\lim_{X\to 0}\mathrm{e}^X=1\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{l}(\textit{composition})\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^{1/x}=1\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}1+\frac{1}{x}=1\end{array}\right\}\ \begin{array}{l}(\textit{somme})\\ \displaystyle\lim_{x\to-\infty}\phi(x)=2\end{array}\quad \text{et idem, en } +\infty,\ \lim_{x\to+\infty}\phi(x)=2.$$

$\forall x \neq 0,\ \left(1+\dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{1/x}+1=\mathrm{e}^{1/x}+\dfrac{1}{x}\mathrm{e}^{1/x}+1.$

On pose $X=\dfrac{1}{x}$ et l'expression précédente devient égale à, en fonction de X :

$$\mathrm{e}^X+X\mathrm{e}^X+1$$

Si $x \underset{x<0}{\longrightarrow} 0$	$X \longrightarrow -\infty$	$\mathrm{e}^X \underset{X\to-\infty}{\longrightarrow} 0$ et $X\mathrm{e}^X \underset{X\to-\infty}{\longrightarrow} 0\,(R)$ donc $\mathbf{e^X+Xe^X+1 \underset{X\to-\infty}{\longrightarrow} 1}$
Si $x \underset{x>0}{\longrightarrow} 0$	$X \longrightarrow +\infty$	$\mathrm{e}^X \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $X\mathrm{e}^X \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty\,(R)$ donc $\mathbf{e^X+Xe^X+1 \underset{X\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

D'où les résultats dans le tableau de variations.

Signe de $\phi(x)$ sur $\mathbb{R}^*$.
Par simple lecture du tableau de variations et comme $1-\mathrm{e}^{-2}>0$, on peut affirmer que $\phi(x)>0$ sur $\mathbb{R}^*$.

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=\frac{x}{1+\mathrm{e}^{1/x}}$$

On admet que f est dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$.

On peut écrire que $f=\dfrac{u}{1+\mathrm{e}^v}$ avec

$u : x \longmapsto x$	$u' : x \longmapsto 1$
$v : x \longmapsto \dfrac{1}{x}$	$v' : x \longmapsto -\dfrac{1}{x^2}$

et $f'=\dfrac{u'(1+\mathrm{e}^v)-u(-v'\mathrm{e}^v)}{(1+\mathrm{e}^v)^2}$

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } x\neq 0,\ f'(x)&=\frac{1\times(1+\mathrm{e}^{1/x})-x(-1/x^2)\mathrm{e}^{1/x}}{(1+\mathrm{e}^{1/x})^2}\\&=\frac{1+\mathrm{e}^{1/x}+(1/x)\mathrm{e}^{1/x}}{(1+\mathrm{e}^{1/x})^2}\\&=\frac{\phi(x)}{(1+\mathrm{e}^{1/x})^2}\end{aligned}$$

Or,
- $\forall x\neq 0,\ (1+\mathrm{e}^{1/x})^2>0$;
- D'après la question 3, $\phi(x)>0$ sur $\mathbb{R}^*$.

On peut donc écrire que $f'(x)>0$ sur $\mathbb{R}^*$ et donc que la fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$.

HORS programme : La fonction f est prolongeable par continuité en 0. En effet $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=0$ donc en posant $f(0)=0$, la fonction f ainsi obtenue est continue sur $\mathbb{R}$. En revanche, f n'est pas dérivable en 0 car le taux d'accroissement de f en 0 admet une limite à gauche différente de la limite à droite.