EXERCICE 1

Produit matriciel

Trois étudiants e_1, e_2 et e_3 passent quatre épreuves
(E_1 : Mathématiques , E_2 : Physique , E_3 : Chimie et E_4 : Culture générale).

Deux concours C_1 et C_2 se basent sur les notes des ces quatre épreuves mais avec des coefficients différents.
La matrice des notes est $N = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 13 & 15 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 15 & 13 & 13 & 6 \end{pmatrix}$ où n_{ij} est la note de l'étudiant e_i à l'épreuve E_j.

La matrice des coefficients est $Q = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ où q_{ij} est le coefficient de l'épreuve E_i au concours C_j.

1. *Exprimer, à l'aide de N et de Q, la matrice T du total des points de ces étudiants au deux concours.*

   La première ligne de la matrice N mutipliée par la première colonne de la matrice Q donnera le total des points de l'élève e_1 au concours C_1. De plus, $N \in \mathcal{M}_{34}(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{M}_{42}(\mathbb{R})$ donc la multiplication NQ est réalisable et donne le résultat attendu : $T = NQ$.

   $$T = \begin{pmatrix} 12 & 11 & 13 & 15 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \\ 15 & 13 & 13 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 244 & 201 \\ 180 & 149 \\ 262 & 197 \end{pmatrix}$$

2. *Matrice D telle que TD représente la moyenne de chaque étudiant aux deux concours.*

   Pour obtenir la moyenne, il faut que chaque total de points soit divisé par la somme des coefficients. De plus, la matrice TD doit appartenir à $\mathcal{M}_{32}(\mathbb{R})$, comme la matrice T ; ainsi la matrice D doit être carrée d'ordre 2. Si l'on note s_k la somme des coefficients des concours C_k avec $k \in \{1, 2\}$, on doit choisir D de la façon suivante :

   $$D = \begin{pmatrix} \frac{1}{s_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix}$$

   Ainsi D choisie, on obtient : $TD = \begin{pmatrix} 244 & 201 \\ 180 & 149 \\ 262 & 197 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{20} & 0 \\ 0 & \frac{1}{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12.2 & 12.5625 \\ 9 & 9.3125 \\ 13.1 & 12.3125 \end{pmatrix}$ par ligne, les moyennes aux deux concours de chaque étudiant.

EXERCICE 2

Système et matrice

On considère le système suivant : $(S) \left\{ \begin{array}{l} x + 3y + 4z = 50 \\ 3x + 5y - 4z = 2 \\ 4x + 7y - 2z = 31 \end{array} \right.$

1. $(S) \Leftrightarrow AX = B$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & -4 \\ 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2. A la calculatrice $A^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -18 & -34 & 32 \\ 10 & 18 & -16 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}$

3. $\left\{ \begin{array}{l} AX = B \\ \text{A inversible} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A^{-1}(AX) = A^{-1}B \\ \text{A inversible} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (A^{-1}A)X = A^{-1}B \\ \text{A inversible} \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} X = A^{-1}B \\ \text{A inversible} \end{array} \right.$

   Ce qui donne $X = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -18 & -34 & 32 \\ 10 & 18 & -16 \\ -1 & -5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 50 \\ 2 \\ 31 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ et l'unique sokution de (S) est le triplet $(3, 5, 8)$.

EXERCICE 3 *Propriétés du produit matriciel*

On considère les matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

1. $J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2$
2. Compte-tenu des règles opératoires sur les matrices, $A = 4J + I_2$.
3. En déduire le calcul de $A \times A$
   (a) directement : $A^2 = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$
   (b) en utilisant le résultat précédent : $A^2 = (4J + I_2)(4J + I_2) = 16J^2 + 4J + 4J + I_2 = 8J + I_2 = \begin{pmatrix} 9 & -8 \\ 8 & -7 \end{pmatrix}$

EXERCICE 4 *Récurrence et matrice*

On pose $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. $A = N - 3I_2$.
2. $N^2 = 0_2$ et $A^2 = (N - 3I_2)(N - 3I_2) = N^2 - 3N - 3N + 9I_2 = 9I_2 - 6N$.
3. On pose, pour tout entier naturel k, $\mathcal{P}(k) : A^k = (-3)^k I_2 + k(-3)^{k-1} N$.

- **Initialisation** : $k = 0$; $A^0 = I_2$ et $(-3)^0 I_2 + 0 \times (-3)^{-1} N = I_2$ donc $P(0)$ est vraie.

- **Hérédité** : Démontrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P(k)$ vraie implique $P(k+1)$ vraie.

$$\begin{aligned} P(k)\,\text{est vraie} &\Leftrightarrow A^k = (-3)^k I_2 + k(-3)^{k-1} N \\ &\Rightarrow AA^k = (N - 3I_2)((-3)^k I_2 + k(-3)^{k-1} N) \\ &\Leftrightarrow A^{k+1} = (-3)^k N + k(-3)^{k-1} N^2 + (-3)^{k+1} I_2 + k(-3)^k N \\ &\Leftrightarrow A^{k+1} = (-3)^{k+1} I_2 + (k+1)(-3)^k N \quad (\mathrm{N}^2 = 0_2 \text{ et factorisation par } (-3)^{\mathrm{k}}\mathrm{N}) \end{aligned}$$

donc $P(k+1)$ est vraie.

- **Conclusion :** Ainsi, d'après le principe du raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}$,

$$A^k = (-3)^k I_2 + k(-3)^{k-1} N.$$

Ce qui donne pour la matrice A^k :

$$A^k = \begin{pmatrix} (-3)^k & 2k(-3)^{k-1} \\ 0 & (-3)^k \end{pmatrix} \quad , k \in \mathbb{N}$$