EXERCICE 1 — *Restitution du cours.*

Soit a,a',b et b' des entiers relatifs et n un entier naturel non nul.

On sait que : Si $a \equiv a'(n)$ et si $b \equiv b'(n)$, alors $ab \equiv a'b'(n)$ ($\bigstar$).

Soit, pour tout entier naturel p non nul , la propriété $P(p)$: $a \equiv b(n) \Rightarrow a^p \equiv b^p(n)$.

Initialisation : $a^1 = a$ et $b^1 = b$ et $a \equiv b(n)$ donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $P(p)$ est vraie au rang p. Démontrons qu'elle est vraie au rang $p+1$.

$$\begin{aligned} P(p)\,\text{est vraie} &\Leftrightarrow a^p \equiv b^p(n) \\ &\Rightarrow a^p \times a \equiv b^p \times b(n) \text{ (grâce à } (\bigstar)) \\ &\Leftrightarrow a^{p+1} \equiv b^{p+1}(n) \end{aligned}$$

donc $P(p+1)$ est vraie.

Conclusion : Ainsi pour tout entier naturel p non nul :

$$\text{Si } a \equiv b(n), \text{ alors } a^p \equiv b^p(n)$$

EXERCICE 2 — *Division Euclidienne.*

Les deux questions qui suivent sont indépendantes.

1. Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $63 = bq + 17$ et $17 < b$. Ce qui peut s'écrire $bq = 46$ et $b > 17$.
   Les seules possibilités sont donc $bq = 46 \times 1 = 23 \times 2$. Les deux couples $(b; q)$ possibles sont donc $(46; 1)$ et $(23; 2)$.

2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 + 5n + 7 = (n+3)(n+2) + 1$. Comme $1 < n+3$, la relation précédente est l'écriture de la division euclidienne de $n^2 + 5n + 7$ par $n+3$: le reste vaut 1 et il est indépendant de n.

EXERCICE 3 — *Langage des congruences.*

Les deux questions qui suivent sont indépendantes.

1. $n \in \mathbb{Z}$. $n + 5 \equiv 3\,(9) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}$ tel que $n + 5 = 3 + 9k \Leftrightarrow n = 9k - 2$.

   L'ensemble cherché est la partie de $\mathbb{Z}$ suivante $\{9k - 2; k \in \mathbb{Z}\}$

2. Reste dans la division euclidienne de 4^{2014} par 7 : en remarquant que $4^3 \equiv 1(7)$, on divise 2014 par 3, on obtient $2014 = 3 \times 671 + 1$. De sorte que : $4^{2014} = 4^{3\times 671+1} = (4^3)^{671} \times 4$
   $$\text{et } 4^3 \equiv 1(7) \Rightarrow (4^3)^{671} \equiv 1^{671}(7) \Rightarrow (4^3)^{671} \times 4 \equiv 1^{671} \times 4(7) \Leftrightarrow 4^{2014} \equiv 4(7)$$
   Le reste dans la division de 4^{2014} par 7 est 4.

3. $7 \equiv -1(4)$ donc $a = -1$ est un bon « candidat ».

   $7 \equiv -1(4) \Rightarrow 7^{2n} \equiv (-1)^{2n}(4) \Leftrightarrow 7^{2n} \equiv 1(4) \Leftrightarrow 7^{2n} + 3 \equiv 1 + 3 \equiv 0(4)$.

   Le reste dans la division de $7^{2n} + 3$ par 4 est donc égal à 0 : pour tout entier naturel n, $7^{2n} + 3$ est divisible par 4.

EXERCICE 4

Propriétés de divisibilité.

On désigne par n et a deux entiers naturels supérieurs à 2.

$\left.\begin{array}{l} a|3n+1 \\ a|4n-5 \end{array}\right\}$ donc $a|4(3n+1)-3(4n-5) \Leftrightarrow a|19$. Comme $a \geqslant 2$, $a = 19$.

On a donc : $\left.\begin{array}{l} 19|3n+1 \\ 19|4n-5 \end{array}\right\}$ d'où $19|4n-5-(3n+1) \Leftrightarrow 19|n-6$. On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = 19k+6$.

On cherche n tel que $2 \leqslant n \leqslant 100$ $\Rightarrow$

k	0	1	2	3	4
n	6	25	44	63	82